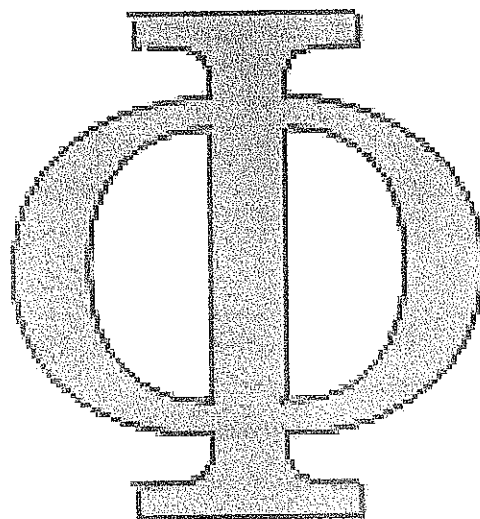


EL NOMBRE D'OR

EN L'ARQUITECTURA MODERNISTA

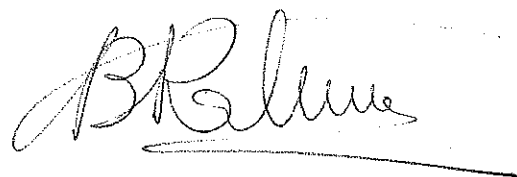


NOTA: 9

Gerard Corominas i Cruells
Tutora de recerca: Beatriz Rodríguez
I.E.S. Blancafort de La Garriga
2n de Batxillerat
Curs 2002-2003

Sense matemàtiques no hi ha art

Luca Pacioli (1445-1514)

A handwritten signature in cursive script, appearing to read 'BRodriguez', with a horizontal line underneath.

- Beatriz Rodríguez -

AGRAÏMENTS

Vull agrair a l'arquitecte Lluís Cuspinera que m'ha facilitat els plànols i seccions de la Casa Barbey i de la Bombonera.

També vull agrair a l'Anna Casanovas que m'ha deixat entrar a la Torre Iris i fotografiar diversos elements de dins i fora l'edifici.

A en Pere Cruells per facilitar-me alguns llibres de l'escola d'arquitectura de Barcelona.

Dono les gràcies al meu pare, que m'ha ajudat a planificar i organitzar els diferents apartats del treball.

I agraeixo a la Beatriz Rodríguez el fet d'haver-me tutoritzat aquest treball.

ÍNDIX

1. Introducció	1
2. El nombre d'or	3
2.1. Les proporcions	3
2.2. Divisió d'un segment en mitjana i extrema raó	6
2.3. Obtenció gràfica del nombre d'or	8
2.4. Propietats del nombre d'or: la successió de Fibonacci	11
3. El nombre d'or i les seves aplicacions al llarg del temps	18
4. Mètodes per determinar el nombre d'or	24
4.1. Aparell per obtenir el nombre d'or (auròmetre)	24
4.2. Construcció de l'auròmetre	26
4.3. Determinació de la secció àuria sobre el plànol o secció	31
5. El nombre d'or al modernisme	33
5.1. Sant Vicenç de Cardona	35
5.2. Catedral de Mallorca	37
5.3. Palau Episcopal d'Astorga	39
5.4. Casa Calvet	42
5.5. La Sagrada Família	45
5.6. La Casa Milà	47
5.7. Casa Barbey	49
5.8. La Bombonera	53
6. Conclusions i aportacions del treball	56
6.1. Conclusions	56

6.2. Aportacions del treball	57
7. Bibliografia	58

1. INTRODUCCIÓ

Les proporcions han tingut molta importància en totes les branques de l'art i l'estètica. Pintors, escultors, arquitectes, publicistes i fins i tot músics s'han basat en la teoria de la proporció a l'hora de crear les seves obres.

Trobaré aplicacions de la teoria de la proporció en les piràmides d'Egipte, els edificis de la Grècia clàssica com al Partenó, en les pintures de Leonardo da Vinci, les escultures de Miquel Àngel (Michelangelo Buonarroti) i les obres de l'arquitecte Le Corbusier. En diverses de les obres va quedar clar que els seus autors van fer servir els coneixements de la teoria de la proporció. La intenció d'aquests autors era aconseguir crear un efecte visual agradable. De la mateixa manera que moltes obres i elements arquitectònics busquen l'harmonia a través de les figures geomètriques (figura 1). Un dels exemples més actuals són les targetes de crèdit. Per què les targetes de crèdit tenen les mides que tenen? Simplement, per una qüestió d'estètica. Es tracta d'un rectangle ni massa allargat ni massa quadrat i les seves mides tenen unes propietats matemàtiques molt interessants. La proporció que existeix entre la seva llargada i amplada es basa en el nombre d'or, que és l'objecte d'aquest treball de recerca.



Figura 1. Full del famós àlbum de croquis de Vilard d'Honnecouurt, arquitecte francès del S. XIII. S'observa la trama geomètrica de polígons i arcs, realitzada per l'estudi i composició de diferents figures

Coses tant aparentment allunyades com el pentàgon, el decàgon, la successió de Fibonacci, elements de la natura com les estrelles de mar, les branques dels arbres, les pinyes, el cos humà i un llarg etcètera tenen en comú una proporció molt especial que és l'anomenada proporció àuria. No és d'estranyar doncs, que l'home, sovint imitador de la Natura, hagi volgut reproduir aquestes proporcions en les seves obres d'art, ja sigui a la façana del Partenó, en les esglésies romàniques i gòtiques, o sigui en la *Venus* de Botticelli o la Gioconda.

En aquest treball, m'he proposat d'estudiar el modernisme català. Vull analitzar si en diverses obres de Gaudí i també en algunes de les cases modernistes de la Garriga, s'ha tingut en compte la proporció àuria o nombre d'or. Primer, el que faré és comprovar el que diu la bibliografia que he consultat: que el nombre d'or és present a les obres d'estil romànic i gòtic, i observaré quins són els elements que mantenen la proporció. Després analitzaré l'estructura arquitectònica de les construccions modernistes.

La memòria que presento l'he estructurada en diversos capítols. Aquest és el primer, en el que intento introduir una mica el treball. En el segon comentaré què són les proporcions, seguiré més en concret explicant què és el nombre d'or, com s'obté, les seves propietats i les seves aplicacions. Al tercer capítol faré un resum de la història del nombre d'or, quan es va trobar i qui el feia servir. En el capítol següent descriuré un petit aparell que he dissenyat per fer mesures de la proporció àuria sobre el terreny i l'explicació de com determinar la secció àuria sobre un plànol. Al capítol cinquè explicaré molt breument què és el modernisme, presentaré els edificis modernistes que he estudiat juntament amb alguns exemples romànics i gòtics en els que apareix la proporció àuria. Finalment, al capítol sisè, presento els resultats i les conclusions del treball.

M'he adonat que la informació existent és tan abundant, que he hagut de resumir-la. Per aquest motiu, he evitat també els aspectes més complexos i he procurat, sempre que he pogut, d'acompanyar el text amb figures que l'ajudin entendre i que serveixin d'exemple.

2. NOMBRE D'OR

Primer de tot definirem què és el nombre d'or (Φ). Veurem també que hi ha moltes maneres d'anomenar-lo i que té moltes aplicacions. En un apartat posterior explicaré com s'obté fent servir l'exemple de la divisió d'un segment i després introduiré la secció àuria.

El nombre d'or és un nombre irracional, i el seu valor és:

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618033988 \dots$$

El nombre d'or es designa amb la lletra Φ (fi) en honor de l'escultor Fídies que l'havia fet servir en les seves obres.

Aquest nombre que, a primer cop d'ull, no sembla tenir res d'especial, és una constant que dóna la proporció entre les dues longituds d'un segment dividit en mitjana i extrema raó (això ho comentaré més endavant) i apareix en moltes formes geomètriques.

Al llarg del temps, el nombre d'or ha tingut noms molt variats (Bonell, 1999): Durant el Renaixement, el monjo bolonyès Fray Luca Pacioli di Borgo, en la seva obra *De Divina Proportione* el va anomenar *divina proporció*. En Johannes Kepler, el considera una pedra preciosa i l'anomena *secció divina*. Leonardo da Vinci li donà el nom de *secció àuria*. El matemàtic alemany C. Clavius, emprà la denominació *divisió proporcional* i es creu que es també a Alemanya, al començament del segle XIX, on se li va començar a dir proporció àuria (Pedoe, 1979). Els noms que més es fan servir són *secció àuria* (segment dividit en dues parts que tenen la proporció àuria), *proporció àuria* (proporció que dóna el nombre d'or) i *nombre d'or* (Φ).

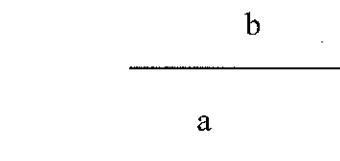
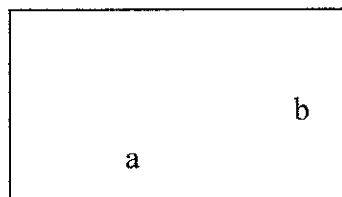
Començaré explicant què són les proporcions per després explicar com es pot obtenir la proporció que dóna el nombre d'or i en quines figures geomètriques la podem trobar.

2.1. LES PROPORCIIONS

La definició de proporció és senzilla. Donats dos nombres positius a i b , es defineix la proporció entre ells com el quocient del major entre el menor. Això ho descrivim fent servir les funcions $\max(a,b)$ i $\min(a,b)$, que donen el major i el menor dels dos nombres a i b . D'aquesta manera la proporció entre els nombres a i b és:

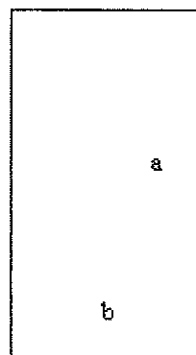
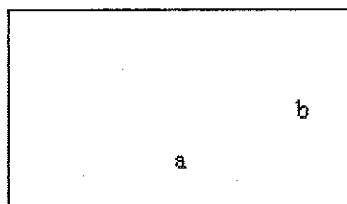
$$p(a,b) = \frac{\max(a,b)}{\min(a,b)}$$

La definició de proporció també es pot interpretar com la proporció d'un rectangle de costats a i b , o simplement com la proporció entre dos segments de longituds a i b .



El primer que es desprèn de la definició, és que la proporció és sempre major o igual que 1, i només serà 1 quan a i b siguin iguals. En el cas dels rectangles, això vol dir que tot rectangle té una proporció més gran que 1, i només és 1 si el rectangle és, en realitat, un quadrat.

La proporció no depèn de l'ordre de les dades ja que sempre tindrem el quocient entre la dada més gran i la petita. Per això $p(a,b) = p(b,a)$. Aquesta propietat es pot veure amb rectangles, perquè la proporció no depèn de la seva posició.



La definició de proporció d'un rectangle no és "base dividida per l'alçada", sinó "costat major entre costat menor".

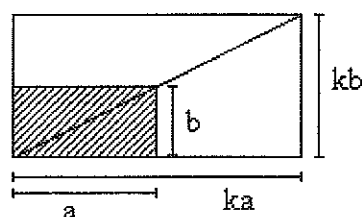
La relació no canvia augmentant o reduint les dimensions del rectangle proporcionalment. És invariable. Això vol dir que:

$$p(ka, kb) = p(a, b)$$

Això es pot veure fàcilment en forma de fracció, ja que es poden eliminar els factors que coincideixen al numerador i al denominador:

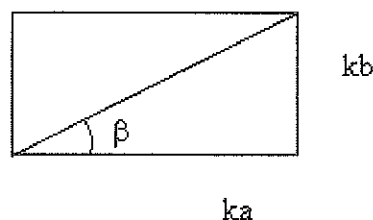
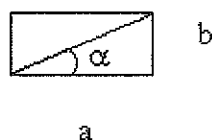
$$\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$$

Per tant en el cas dels rectangles, donat un rectangle de costat a i b , si multipliquem els dos costats per una constant positiva "k", s'obté un rectangle de la mateixa proporció.



La manera gràfica de veure si dos rectangles tenen o no la mateixa proporció és sobreposar-los de manera que coincideixin un dels seus vèrtexs així com dos costats. Llavors, si les diagonals de cada rectangle que passen per aquest vèrtex se superposen, els rectangles tindran la mateixa proporció.

Ho demostraré comprovant que els angles α i β que formen la diagonal de cada rectangle amb el respectiu costat llarg és el mateix



La tangent de l'angle α en el rectangle petit val:

$$\tan \alpha = \frac{b}{a}$$

La tangent de l'angle β en el rectangle gran val:

$$\tan \beta = \frac{kb}{ka} = \frac{b}{a}$$

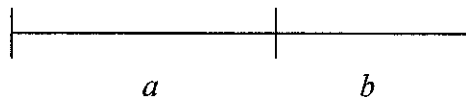
Llavors, $\alpha = \beta$ i les diagonals es poden superposar

Aquesta propietat l'aprofitaré més endavant per analitzar les plantes i seccions dels edificis romànics, gòtics i modernistes (apartat 4.3.).

2.2. DIVISIÓ D'UN SEGMENT EN MITJANA I EXTREMA RAÓ

Si volem dividir un segment en dues parts, ho podem fer de moltes maneres. La primera que se'ns acudiria és fer-ho per la meitat. Qualsevol altra divisió donarà dos parts desiguals.

Ara mirarem la manera de dividir el segment tenint en compte les proporcions entre les parts obtingudes.



Si a les dues parts en que dividim el segment les anomenem a i b , essent a el subsegment llarg i b el curt, les úniques proporcions que podem fer són les següents:

$$\frac{a+b}{a}, \frac{a+b}{b}, \frac{a}{b}$$

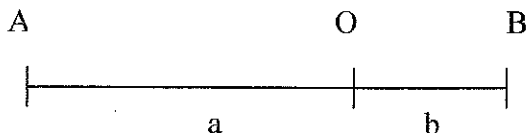
$(a + b)$ = segment complet

Les igualtats que podem obtenir entre aquestes proporcions són:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a+b}{b} \quad \frac{a+b}{b} = \frac{a}{b} \quad \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

En el primer cas arribaríem a la conclusió que $a = b$, amb el que obtenim el segment dividit per la meitat. En aquest cas, el valor de la proporció és 2. En el segon cas arribaríem a la conclusió que $a + b = a$, és a dir, no estariem dividint el segment. El tercer cas és el més interessant perquè ens porta a la proporció anomenada de *mitjana i extrema raó* o secció àuria. Dit d'altra manera, el quocient entre la part més llarga i la curta, i entre el tot i la part més llarga.

Considerem un segment de recta AB i un punt O situat entre A i B, que divideix el segment en dues parts desiguals:



El punt O dividirà el segment AB segons la proporció àuria si la relació de la part més llarga amb la part més petita és igual a la relació del tot amb la part més llarga, és a dir que $AO/OB = AB/AO$. Si aquesta condició es compleix, això vol dir que el punt O divideix el segment AB en mitjana i extrema raó.

Si diem $AO = a$ i $OB = b$, llavors $AB = a + b$, i la relació abans esmentada quedaria de la manera següent:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

d'on

$$\frac{a^2}{b} = a + b$$

dividint tot per b

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a}{b} + 1$$

és a dir

$$\frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b} - 1 = 0 \quad \text{que ho podem escriure com} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0 \quad [1]$$

prenent $\frac{a}{b}$ com incògnita i resolent l'equació de segon grau, tenim:

$$\frac{a}{b} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

una solució és l'arrel positiva

$$\frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180339, \text{ això és, } \Phi \text{ el nombre auri}$$

l'altra solució dóna:

$$\frac{a}{b} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -0,6180339, \text{ que és la inversa de l'arrel positiva}$$

a i b són segments, o sigui de valor positiu. Així, hem de descartar aquesta solució ja que, per definició, una proporció és el nombre gran dividit entre el petit, i si els dos nombres són positius la proporció serà sempre més gran que 1.

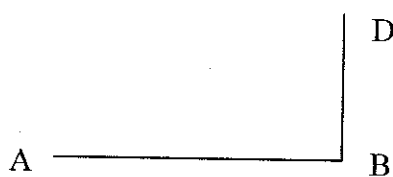
2.3. OBTENCIÓ GRÀFICA DEL NOMBRE D'OR

Fins aquí he definit què és el nombre d'or i quin és el seu valor. Ara descriuré un procediment gràfic per dividir qualsevol segment de recta en la secció àuria (mitjana i extrema raó).

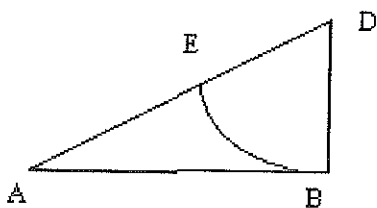
Donat un segment de longitud AB , des del punt B tracem una perpendicular BD de longitud la meitat de AB , és a dir:

$$BD = \frac{AB}{2}$$

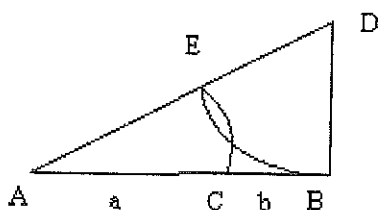
i gràficament:



Unim A amb D amb un segment. Amb un compàs tracem un arc agafant D com a centre, des de B fins a tallar la recta AD en el punt E . Així $DB = DE$



Després, agafant A com a centre, tracem un arc des d' E fins a tallar al segment AB en el punt C



Els segments obtinguts, a i b , tenen la proporció àuria. Ho demostro tot seguit fent servir el Teorema de Tales.

La hipotenusa AD del triangle val

$$AD = \sqrt{AB^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{AB^2 + \frac{AB^2}{4}}$$

$$AD = \sqrt{\frac{4AB^2}{4} + \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{\frac{5AB^2}{4}} = \frac{AB}{2}\sqrt{5}$$

De la figura, $AE = AD - DE$. Recordem que $AE = a$ i que $DE = AB/2$, llavors:

$$a = AE = AD - DE = \frac{AB\sqrt{5}}{2} - \frac{AB}{2}$$

$$a = AE = \frac{AB\sqrt{5} - AB}{2} = \frac{(\sqrt{5} - 1)AB}{2}$$

Per obtenir la proporció dividim AB entre a :

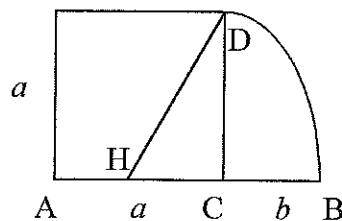
$$\frac{AB}{a} = \frac{AB}{\frac{(\sqrt{5} - 1)AB}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1}$$

Si multipliquem el numerador i el denominador per $\sqrt{5} + 1$ tenim:

$$\frac{AB}{a} = \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)} = \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{5 - 1}$$

$$\frac{AB}{a} = \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{4} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \Phi$$

Un altre procediment per obtenir la divina proporció a partir del segment a , és el següent (Pedoe, 1979):



Primer construïm un quadrat de costat a . Busquem el punt mig H del costat AC . Unim H amb D . Agafant H com a centre i radi HD , tracem un arc a partir de D que intersecta la prolongació del segment AC i obtenim el punt B . Un cop fet això tenim que:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC} = \Phi$$

o el que és el mateix,

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \Phi$$

i diem que el segment AB queda dividit en la secció àuria per C. Per demostrar-ho, fem el següent:

Sabem que $AC = CD$ i que $HC = AC/2$ i també que $HD = HB = AB - AC/2$.

Segons el teorema de Pitàgores, tenim que $(HD)^2 = (HC)^2 + (CD)^2$. Si substituïm, tenim que

$$(AB - AC/2)^2 = (AC/2)^2 + (AC)^2$$

$$\left(AB - \frac{AC}{2}\right)^2 = \frac{(AC)^2}{4} + (AC)^2$$

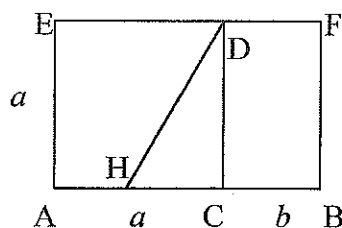
$$\left(AB - \frac{AC}{2}\right)^2 = \frac{(AC)^2}{4} + \frac{4(AC)^2}{4} = \frac{5(AC)^2}{4}$$

$$\left(AB - \frac{AC}{2}\right) = \sqrt{\frac{5(AC)^2}{4}} = \frac{AC\sqrt{5}}{2}$$
$$AB = \frac{AC\sqrt{5}}{2} + \frac{AC}{2} = \frac{(AC\sqrt{5} + AC)}{2}$$

$$AB = AC \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right)$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \Phi$$

És fàcil veure que amb la construcció d'abans hem obtingut un rectangle, el ABFE, que és un rectangle d'or (rectangle que els seus costats tenen la proporció àuria)



Però també s'ha definit un nou rectangle, el CBFD que també és un rectangle d'or. Seguint el mateix procediment a partir d'aquest rectangle, en podrien sortir d'altres més petits també auris.

2.4. PROPIETATS DEL NOMBRE D'OR: LA SUCCESSIÓ DE FIBONACCI

Les primera propietat curiosa del nombre d'or, ve de la mateixa equació [1] que hem fet servir per obtenir el seu valor a l'apartat 2.2, que ara torno a escriure:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0$$

o de manera més general

$$x^2 - x - 1 = 0$$

i d'aquí:

$$x^2 = x + 1 \quad [2]$$

Recordem que la resolució d'aquesta equació de segon grau donava:

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$$

substituint x per Φ a l'equació [2] tenim

$$\Phi^2 = \Phi + 1 \quad [3]$$

és a dir, el nombre d'or al quadrat és ell mateix més la unitat. Si multipliquem l'expressió [3] per Φ , obtenim

$$\Phi^3 = (\Phi + 1) \Phi = \Phi^2 + \Phi \quad [4]$$

però com que $\Phi^2 = \Phi + 1$, ho substituïm a [4] i queda

$$\Phi^3 = (\Phi + 1) + \Phi = 2\Phi + 1$$

si tornem a multiplicar-ho tot per Φ

$$\Phi^4 = (2\Phi + 1)\Phi = 2\Phi^2 + \Phi \quad [5]$$

novament, si tenim en compte que $\Phi^2 = \Phi + 1$ i ho substituïm a [5] tindrem

$$\Phi^4 = 2(\Phi + 1) + \Phi = 3\Phi + 2$$

i, així successivament, trobarem que:

$$\Phi^1 = \Phi$$

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

$$\Phi^3 = 2\Phi + 1$$

$$\Phi^4 = 3\Phi + 2$$

$$\Phi^5 = 5\Phi + 3 \quad [6]$$

$$\Phi^6 = 8\Phi + 5$$

$$\Phi^7 = 13\Phi + 8$$

$$\Phi^8 = 21\Phi + 13$$

Si ens fixem en aquestes igualtats, trobem que els coeficients de Φ que obtenim quan expressem les potències de Φ , formen una sèrie de nombres enters que són: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, etc. Són els mateixos nombres dels termes independents a partir de la segona igualtat. Aquesta successió de nombres s'anomena successió de Fibonacci. S'anomena així perquè Fibonacci és el sobrenom amb que es va conèixer el ric comerciant Leonardo de Pisa (1170-1240). Va viatjar pel Nord d'Àfrica i Àsia i va treballar a Europa en alguns dels coneixements de la cultura àrab i hindú entre altres, el sistema de numeració aràbiga (el que fem servir) i romana.

Es pot observar que cada terme de la successió correspon a la suma dels dos termes precedents. És a dir : $m_n = m_{n-1} + m_{n-2}$.

Aquesta sèrie també es pot escriure de la manera següent

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

$$\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi$$

$$\Phi^4 = \Phi^3 + \Phi^2$$

$$\Phi^5 = \Phi^4 + \Phi^3$$

[7]

.....

$$\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}$$

És fàcil comprovar que [6] i [7] és el mateix. Si agafem, per exemple, $\Phi^5 = \Phi^4 + \Phi^3$ de la sèrie [7] i mirem la relació de potències que hi ha a [6], veiem que $\Phi^4 = 3\Phi + 2$ i $\Phi^3 = 2\Phi + 1$. La suma de $\Phi^4 + \Phi^3$ és $3\Phi + 2 + 2\Phi + 1 = 5\Phi + 3$, és a dir Φ^5 .

La sèrie $1, \Phi, \Phi^2, \Phi^3, \Phi^4, \Phi^5, \dots, \Phi^n$, és una progressió geomètrica de raó Φ (cada terme s'obté multiplicant l'anterior per Φ).

Podem mostrar gràficament la Successió de Fibonacci (1,1,2,3,5,8,13,21,...). Agafem dos quadrats petits de mida 1 i els posem de costat. Al damunt dels quadrats dibuixem un quadrat de mida 2 (1+1).

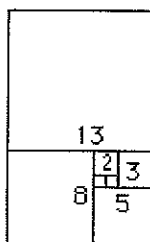


Figura 2. Construcció d'una sèrie de quadrats seguint la successió de Fibonacci.

Ara podem dibuixar un nou quadrat, amb un costat en contacte amb el quadrat de mida 1 i de mida 2, per tant tindrà cada costat de 3 unitats de llargada. Després un altre quadrat amb cada costat que és la suma del de dos unitats i el de tres (costat de 5 unitats). Podem continuar afegint quadrats al dibuix fent que la llargada del costat del nou quadrat sigui la suma dels costats dels dos darrers quadrats.

Veiem que els dos primers quadrats (de costat unitat) junts fan un rectangle (2x1). Aquest rectangle afegit al quadrat de costat dos unitats, fan un altre rectangle (3x2). Aquest, afegit al quadrat de costat tres unitats, fan un altre rectangle (5x3), i així successivament. Aquest conjunt de rectangles amb costats de llargada corresponent a dos nombres de Fibonacci successius, s'anomenen Rectangles de Fibonacci.

Es pot dibuixar una espiral posant junts quarts de cercle (o de volta), un dins de cada nou quadrat. Aquesta espiral, és la que s'anomena Espiral de Fibonacci. L'espiral de rectangles de Fibonacci augmenta en la seva mida un factor de Φ (1.618...) en un quart de volta. Així,

de Fibonacci augmenta en la seva mida un factor de Φ (1.618...) en un quart de volta. Així, un punt que es troba dins d'un nou quart de volta es troba 1.618.. vegades més lluny del centre que el mateix punt situat en la corba anterior. Una corba semblant es pot trobar a la natura en forma de closca d'alguns cargols, com ara el *Nautilus*.

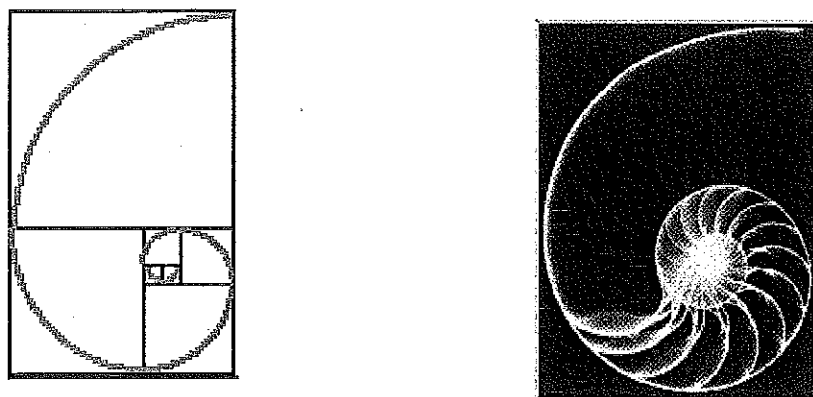


Figura 3. A l'esquerra, l'espiral logarítmica. A la dreta, secció d'una closca de cargol (el *Nautilus*).

Aquest tipus d'espivals reben el nom d'espivals equiangulars o logarítmiques. Els exemples que he presentat són en dues dimensions, però aquestes espivals poden donar lloc a cossos en tres dimensions com el de la figura, que és una espiral logarítmica obtinguda per ordinador (<http://www.notam02.no/~oyvindha/loga.html>):

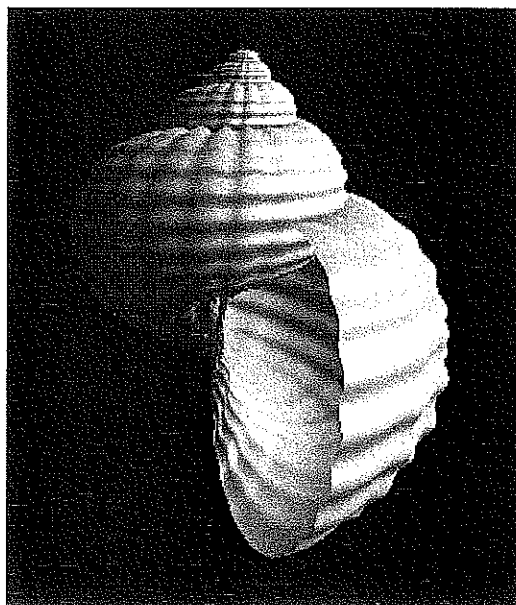


Figura 4. Closca de cargol feta per ordinador en forma d'espiral logarítmica.

Els nombres de Fibonacci també es poden donar en el creixement d'algunes plantes. Això es pot observar mirant els punts de ramificació que tenen. Suposem que quan una planta fa

un nou brot, aquest brot ha de créixer durant dos mesos abans no sigui prou fort per suportar la seva ramificació. Si la planta fa un brot cada mes, tindrem una figura com aquesta:

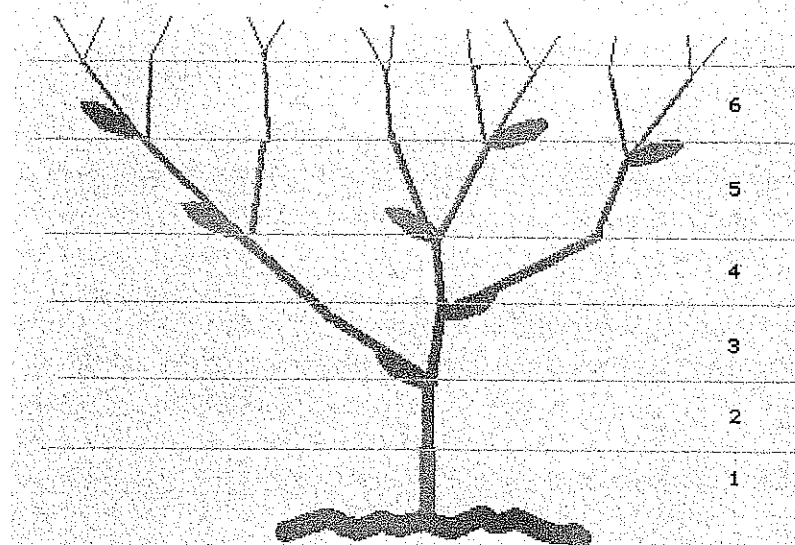


Figura 5. Esquema d'una planta amb ramificacions seguint la sèrie de Fibonacci.

Una planta que té un creixement molt semblant a aquest és l'anomenada: *Achillea ptarmica*.

Les pinyes també mostren les espirals de Fibonacci. En les fotos següents (obtingudes de <http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html>) es veu molt clarament:

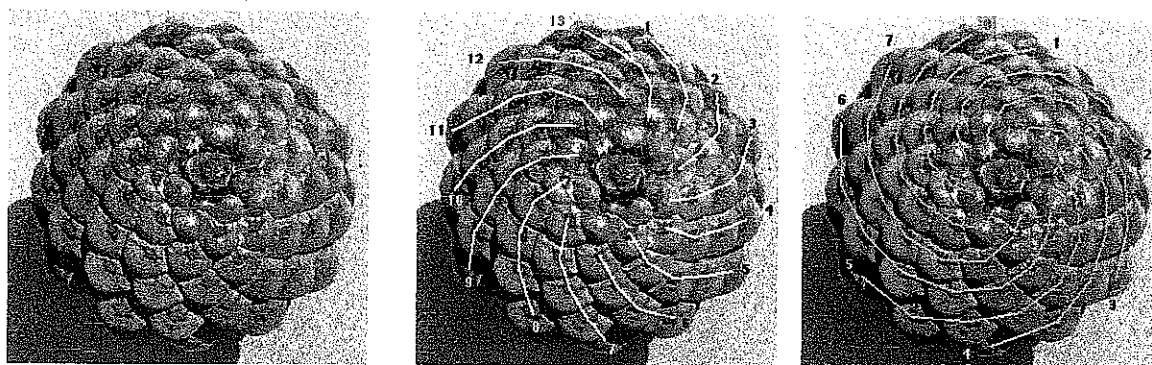


Figura 6. Una pinya on s'hi pot observar fàcilment la seva relació amb l'espiral logarítmica.

La successió de Fibonacci presenta diverses curiositats numèriques. Perquè resulti més senzill, les descriu fent servir casos particulars, encara que compleixen la norma general. D'entrada he calculat els primers catorze termes d'aquesta successió i els anomeno des de t_1 a t_{14} :

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Podem observar diverses coses:

- Si al primer terme li sumem 1, surt el tercer ($1+1=2$). Si sumes els dos primers termes i n'afegeixes 1, et surt el quart ($1+1+1=3$). Si sumes els tres primers termes i n'afegeixes 1, et surt el cinquè ($1+1+2+1=5$). Si sumes els quatre primers termes i n'hi afegeixes 1, et surt el sisè ($1+1+2+3+1=8$).

- Si sumes els tres primers termes que ocupen posició imparell (t_1, t_3, t_5), surt el sisè terme (t_6), ($1+2+5=8$). Si sumes els quatre primers termes que ocupen posició imparell (t_1, t_3, t_5, t_7) surt el vuitè terme (t_8), ($1+2+5+13=21$).

- Si sumes els tres primers termes que ocupen posició parell (t_2, t_4, t_6) i hi afegeixes 1, surt el setè terme (t_7), ($1+3+8+1=13$). Si sumes els quatre primers termes que ocupen posició parell (t_2, t_4, t_6, t_8) i hi afegeixes 1, surt el novè terme (t_9), ($1+3+8+21+1=34$).

Les més interessants i difícils d'imaginar són:

- Agafant dos termes consecutius, per exemple: $t_4=3$ i $t_5=5$; elevat al quadrat i sumant: $3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$ que es el novè ($4+5$) terme de la successió. Agafant dos termes consecutius, per exemple: $t_6=8$ i $t_7=13$; elevat al quadrat i sumant: $8^2 + 13^2 = 64 + 169 = 233$ que es el tretzè ($6+7$) terme de la successió.

- Si elevem al quadrat els cinc primers termes i els sumem, surt el producte del cinquè i el sisè terme: $1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 1 + 1 + 4 + 9 + 25 = 40 = 5 \cdot 8 = t_5 \cdot t_6$. Si fem el mateix per als sis primers termes, surt el producte del sisè i setè terme: $1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 = 1 + 1 + 4 + 9 + 25 + 64 = 104 = 8 \cdot 13 = t_6 \cdot t_7$

- I potser la més sorprenent sigui la següent propietat. Dividim dos termes consecutius de la successió, sempre el major entre el menor i veiem el que obtenim:

$$\begin{aligned}
 1 : 1 &= 1 \\
 2 : 1 &= 2 \\
 3 : 2 &= 1,5 \\
 5 : 3 &= 1,6666666... \\
 8 : 5 &= 1,6 \\
 13 : 8 &= 1,625 \\
 21 : 13 &= 1,6153846... \\
 34 : 21 &= 1,6190476... \\
 55 : 34 &= 1,6176471... \\
 89 : 55 &= 1,6181818
 \end{aligned}$$

Tal com es pot veure, com més alts siguin els nombres de la successió que dividim, el resultat cada vegada s'apropa més al número d'or ($\phi=1,6180339\dots$). En el llenguatge matemàtic:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{t_{n-1}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

3. EL NOMBRE D'OR I LES SEVES APLICACIONS AL LLARG DEL TEMPS

L'antic Egipte va ser un dels primers llocs on es va aplicar les matemàtiques a l'art. És gairebé segur que van atribuir propietats màgiques a la proporció àuria i la van fer servir pel disseny de les seves piràmides.

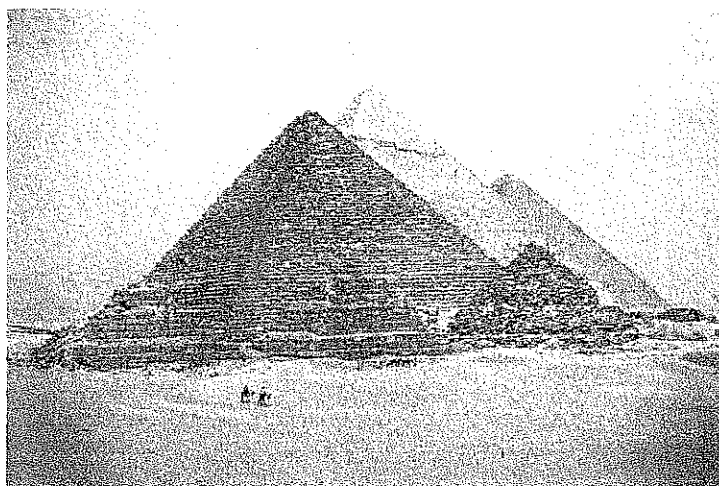


Figura 7. Piràmide de Giza.

Si agafem una secció vertical de la Gran Piràmide que passi pel vèrtex obtindrem un triangle rectangle, també anomenat Triangle Egipci. Els arqueòlegs van trobar que la relació entre la hipotenusa del triangle i la meitat del costat de la base de la piràmide (catet) és 1.61804.... que només difereix de Φ en el cinquè decimal. També van observar que si fem la longitud del costat de la base de la piràmide igual a dues unitats, els costats del triangle mantenen les proporcions: 1, $\sqrt{\Phi}$, i Φ .

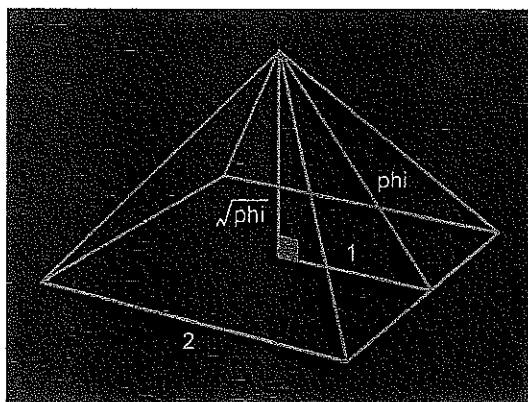
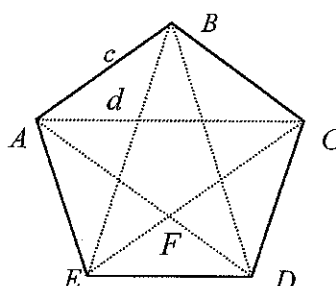


Figura 8. Secció de la Gran Piràmide de Keops.

Pitàgores (560-480 Abans de Crist), el gran geòmetra grec, va estar molt interessat en la secció àuria, i va provar que era la base de les proporcions de la figura humana. Va demostrar que cada part del cos humà esta construïda en una proporció àuria respecte a la resta de parts.

Una de les coses que més va interessar era la divisió d'un cercle en x parts iguals i, més concretament, la divisió en cinc parts, nombre que es troba al cos humà i a molts elements de la natura. El pentàgon regular i les seves diagonals van ser un altre exemple d'introducció de la secció àuria en l'art. Es pot demostrar que en un pentàgon regular la diagonal i el costat estan en proporció àuria i que les diagonals es tallen en punts que les divideixen segons la proporció àuria.



Tenint en compte que en un pentàgon regular cada diagonal (d) és paral·lela a un dels costats (c) del pentàgon, resulta que els triangles ABC i EFD són semblants, i per tant, els seus costats són proporcionals. Així:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{EF}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{EC} - \overline{FC}}$$

i com que $ABCF$ és un paral·lelogram $\overline{FC} = \overline{AB} = c$ i la igualtat anterior es pot reescriure així:

$$\frac{d}{c} = \frac{c}{d - c}$$

L'equació anterior es pot escriure també

$$\frac{d}{c} = \frac{1}{\frac{d-c}{c}} \rightarrow \frac{d}{c} = \frac{1}{\frac{d}{c} - 1}$$

traient el denominador del costat dret de la igualtat, tenim

$$\left(\frac{d}{c}\right)^2 - \frac{d}{c} = 1$$

és a dir, la mateixa equació [1] de l'apartat 2.2 que, com ja sabem, té com a solució el nombre d'or.

L'estrella pentagonal o pentàgon estrellat era , segons la tradició, el símbol dels seguidors de Pitàgores. Els pitagòrics pensaven que el món estava configurat segons un ordre numèric, on només existien els nombres fraccionaris. La casualitat va fer que en el seu propi símbol s'hi trobés un número irracional: el número d'or.

El Partenó d'Atenes és un altre exemple de la relació entre les matemàtiques, en especial el nombre d'or, i l'art.



Figura 9. El Partenó d'Atenes

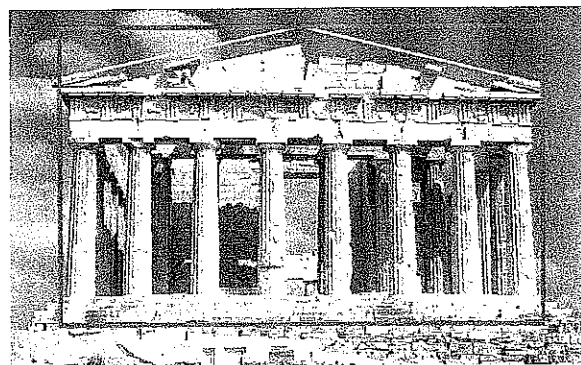


Figura 10. El conjunt del temple encaixa dins un rectangle auri

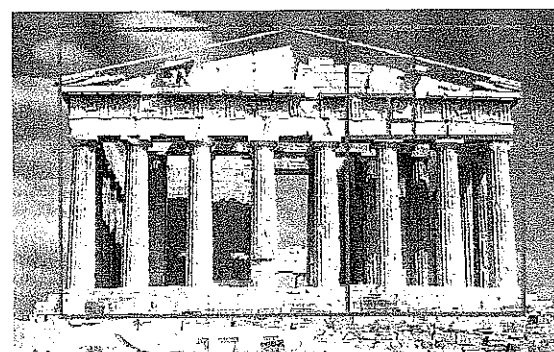


Figura 11. Els diferents elements arquitectònics encaixen perfectament en rectangles auri

Potser la primera referència escrita del nombre d'or la trobem a l'obra dels Elements d'Euclides (? – 300 Abans de Crist), obra en la que se sintetitzen les observacions dels babilonis i els egipcis així com els seus fonaments teòrics. Euclides va dedicar una vintena de proposicions de quatre llibres dels Elements a la divisió de la recta en mitjana i extrema raó.

Als temps moderns es va despertar un gran interès per la proporció àuria. Des del renaixement s'ha fet servir molt en l'art i l'arquitectura. Apareix a l'església veneciana de Sant Marc, construïda al segle XVI i va esdevenir la proporció estàndard de l'alçada respecte l'amplada de les façanes, finestres, pisos i marcs de quadres i pintures.

Leonardo da Vinci (1451-1519) va dedicar molt temps a l'art i la natura. També troba la proporció àuria al cos (figura 12). El melic divideix l'alçada del cos humà en la secció àuria i és el centre del cercle que envolta els braços i peus estirats i separats. El cos també queda contingut en un quadrat limitat per la base dels peus, el cap i la punta dels dits dels braços oberts a l'alçada de les espatlles. La pelvis divideix l'alçada del cos per la meitat.

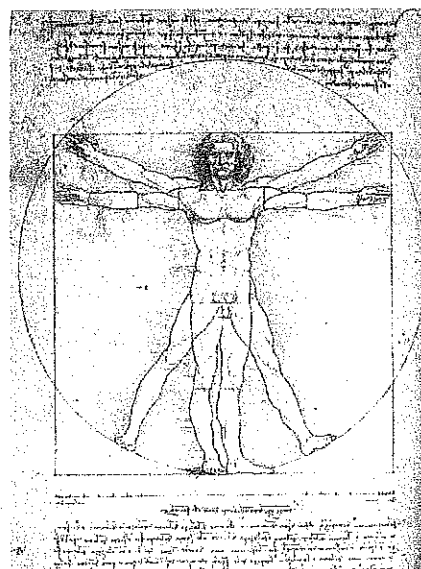


Figura 12. Estudi de les proporcions del cos humà de Leonardo da Vinci que va servir per il·lustrar el llibre de Luca Pacioli, *De Divina Proportione*, el 1509.

El quadrat té per costat l'alçada del cos que coincideix, si el cos és harmoniós, amb la longitud entre els extrems dels dits de les mans quan els braços estan oberts fent un angle de 90° amb el tronc. Resulta que el quocient entre l'alçada de l'home (costat del quadrat) i la distància del melic a la planta del peu separat (radi de la circumferència) és el nombre d'or.

En Miquel Àngel (1475-1564) i en Rafael (1483-1530), van fer les seves obres tenint en compte el nombre d'or. Un exemple el trobem amb la Sagrada Família d'en Miquel Àngel (figura 13) on apareixen les diagonals del pentàgon regular.

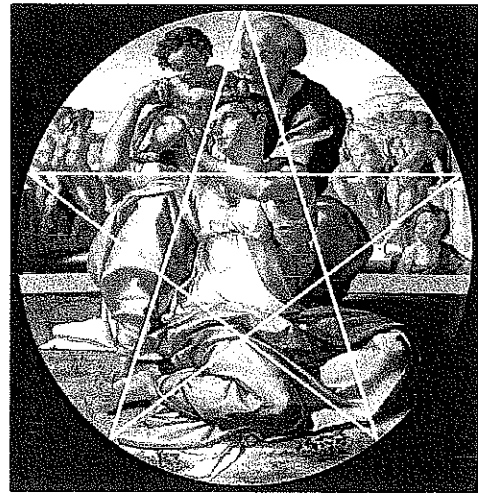


Figura 13. La Sagrada Família d'en Miquel Àngel.

L'impressionista francès Seurat (1859-1891) conté nombrosos exemples de proporcions àuries en les seves pintures, com ara la dels *Banyistes* (figura 14).

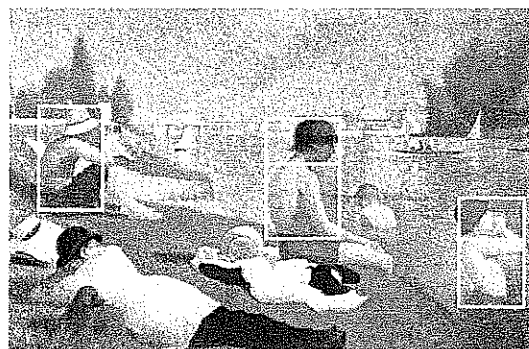


Figura 14. Els Banyistes de Seurat i les proporcions àuries.

L'arquitecte suís LeCorbusier (1887-1965) (en molts llocs he vist escrit que era francès, però no és cert) va desenvolupar una escala de proporcions que va anomenar Le Modulor, basada en el cos humà, l'alçada del qual es divideix en la secció d'or en el melic.

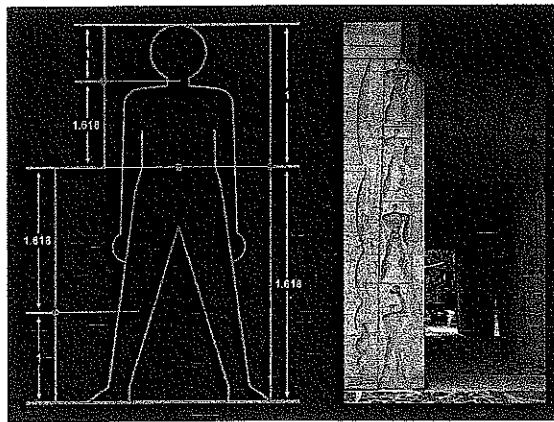


Figura 15. Figura humana que representa Le Modulor.

El quadre de Dalí, la *Leda Atòmica*, pintat el 1949, sintetitza també la tradició pitagòrica del pentàgon estrellat. Es tracta d'una filigrana basada en la proporció àuria, però que està feta de tal manera que no és evident per a l'observador. A la figura 16 hi presentem el quadre i l'esborrany de 1947 on es pot veure l'anàlisi geomètrica detallada, basada en el pentàgon estrellat, feta per Dalí.

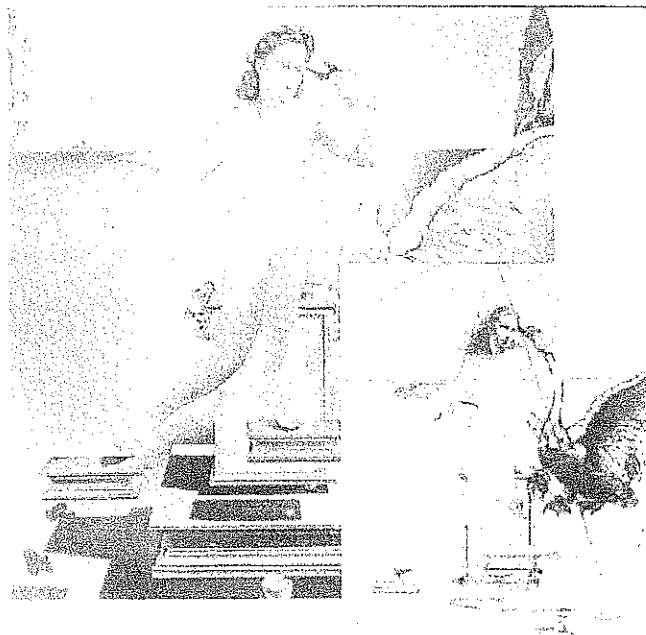


Figura 16. La *Leda Atòmica* de Dalí i el seu esborrany.

4. MÈTODES PER DETERMINAR EL NOMBRE D'OR

Una de les principals dificultats que m'he trobat en el treball, és com saber si una figura, secció planta, etc. té les proporcions àuries. La manera més senzilla és mesurar els segments que m'interessa, dividir-los, i veure si donen el nombre d'or.

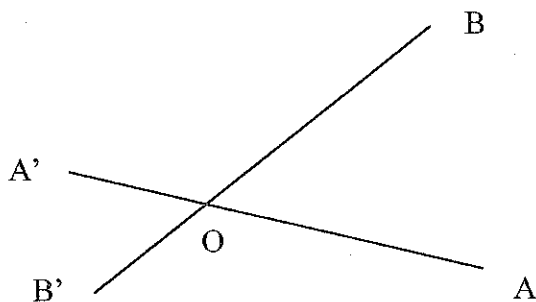
Això a l'hora de posar-ho en pràctica vol dir que, per cada element, tant si treballo al carrer o sobre plànol, he de fer la corresponent mesura de les mides i la seva divisió ajudat amb la calculadora. Tenint en compte que vull mesurar molts elements, necessitava trobar alguna manera per tal de guanyar temps i poder fer moltes mesures.

El primer que se'm va ocórrer va ser que, en comptes de fer mesures directament amb cinta mètrica, amb la dificultat que representa mesurar, per exemple, finestres i sostres alts o l'alçada dels edificis, ho faria a partir de fotografia o plànol. Com que es tracta de trobar proporcions, com he dit al capítol 2.1, aquestes no canvien augmentant o reduint les dimensions. Per aquest motiu, he procurat fer fotografies o baixar-les d'internet, i aconseguir plànols i seccions, tant del modernisme com del gòtic i romànic, per poder treballar amb ells.

4.1. APARELL PER OBTENIR EL NOMBRE D'OR (AURÒMETRE)

Per poder mesurar objectes de mida petita i veure si les seves dimensions mantenen la proporció àuria, he dissenyat un aparell especial que he anomenat provisionalment, auròmetre (no sé si això està inventat o no, però no ho he vist enlloc).

Aquest aparell consisteix en dos llistons de fusta units per un punt com si fos unes tisores. El punt d'unió (O) divideix tots dos llistons en la secció àuria.

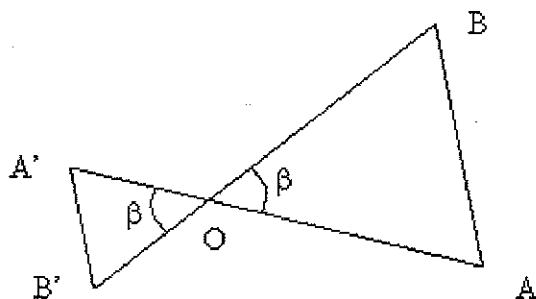


La relació de la distància que hi ha entre les puntes dels segments llargs, $\overline{AB}$, i la dels segments curts, $\overline{A'B'}$, és la proporció àuria.

$$\frac{AB}{A'B'} = \Phi$$

Per demostrar que la proporció entre AB i $A'B'$ és el nombre d'or, faré servir el Teorema de Tales.

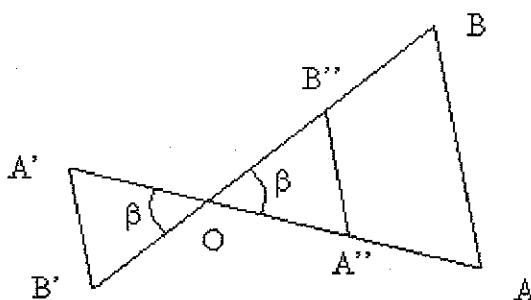
Primer dibuixo els segments, $\overline{AB}$ i $\overline{A'B'}$ i obtinc dos triangles: OAB i $OA'B'$



1) Els segments, $\overline{AA'}$ i $\overline{BB'}$ són de dues rectes que es tallen, per tant, tenen el mateix angle oposat pel vèrtex (β).

2) Els triangles OAB i $OA'B'$ són isòsceles perquè, com he dit, els he construït fent $OA=OB$ i $OA'=OB'$ i en tenir el mateix angle (β), tenen tots els angles iguals. Segons el Teorema de Tales, els triangles que tenen els angles iguals són triangles semblants.

Dit això, construeixo la figura



Els triangles OAB i $OA''B''$ son triangles semblants on:

$$OA' = OA'' \quad OB' = OB'' \quad A'B' = A''B''$$

Pel Teorema de Tales, sabem que els triangles semblants tenen els seus costats proporcionals dos a dos. Això vol dir:

$$\frac{OA}{OA''} = \frac{OB}{OB''} = \frac{AB}{A''B''}$$

com que $A'B' = A''B''$, les proporcions anteriors les podem escriure:

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'}$$

i com que a l'hora de construir l'aparell hem fet:

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \Phi, \text{ llavors } \frac{AB}{A'B'} = \Phi$$

En conclusió, la distància que hi ha entre les puntes dels segments llargs, $\overline{AB}$, manté la proporció àuria amb la dels segments curts, $\overline{A'B'}$.

4.2. CONSTRUCCIÓ DE L'AURÒMETRE

He construït l'aparell amb dos llistons de fusta units amb un clau.

La intenció inicial era que els llistons tinguessin una llargada de 390 mm i que el punt d'unió estigués a 241 mm d'un dels extrems. D'aquesta manera s'obtenia que

$$\frac{390}{241} = 1.6183 \quad \text{i} \quad \frac{241}{149} = 1.6174$$

Una vegada l'he construït m'he adonat que la llargada total és 391.5 mm mentre que el punt d'unió es troba a 242 mm d'un dels extrems. La proporció que obtenim és la següent:

$$\frac{391.5}{242} = 1.6178 \quad \text{i} \quad \frac{242}{149.5} = 1.6187$$

Com que es tracta de fer servir l'aparell per mirar de manera ràpida si determinats objectes tenen la proporció àuria, crec que les proporcions obtingudes són acceptables.

De totes maneres, he pensat que calia comprovar si l'aparell que construït, l'auròmetre, permet trobar la proporció àuria. He mesurat amb un regle graduat diverses distàncies entre les puntes dels segments curts de l'auròmetre i, per a cada una d'elles, he mesurat també la distància entre les puntes dels segments llargs. Després he dividit la distància entre les puntes dels segments llargs per les corresponents dels segments curts. Teòricament, com hem vist, cada vegada m'hauria de donar el nombre d'or.

El primer problema que he trobat, és que amb l'auròmetre tancat, les puntes estan separades 11 mm perquè els llistons tenen un gruix que no les deixa estar en contacte. Quan començo a obrir l'auròmetre em trobo que, degut al gruix dels llistons, la separació absoluta (a) de les puntes és molt més gran que la separació projectada sobre un pla (b), que és la que

hauria de mesurar (veure figura 17.a). Això vol dir, que per distàncies petites, puc cometre un error força important.

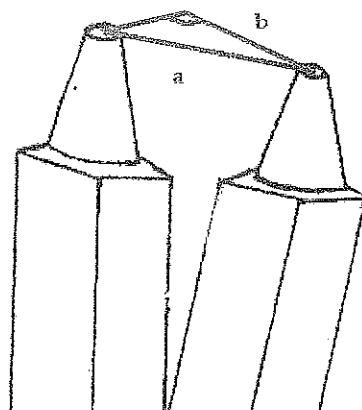


Figura 17.a. Error de l'auròmetre en mesurar distàncies petites. La distància real (a) entre les puntes és més gran que la distància que hauria de mesurar (b) que és la projectada en un pla

A l'hora de mesurar, he intentat minimitzar l'error procurant col·locar el meu punt de vista el més perpendicular possible a l'auròmetre i l'objecte a mesurar. Com si els extrems de l'auròmetre i l'objecte a mesurar estiguessin tots continguts en el mateix pla i així mesurar directament la distància (b) de la figura 17.a.

Un segon problema per conèixer si l'auròmetre em permet determinar el nombre d'or, és que la comprovació l'he feta amb un regle graduat. Amb el regle he mesurat directament la distància entre les puntes. Sembla fàcil però no ho és. El primer que he fet és col·locar el regle entre el centre d'una punta i el centre de l'altra, les puntes de l'auròmetre estan aixafades i no acaben amb un vèrtex (figura 17.b de la pàgina 29). Després he llegit la distància que dóna el regle en mil·límetres. Ja es veu que puc tenir dues fonts d'errors, la primera, en situar el regle entre les puntes i la segona en la lectura del regle ja que com a molt puc llegir fins 0.5 mm. A aquests errors s'ha d'afegir l'error degut al gruix dels llistons, que ja he comentat abans.

Per cada obertura de l'auròmetre, he repetit la mesura de la distància entre les puntes fins que he obtingut almenys 5 vegades el mateix resultat. Tenint en compte tot el que acabo de dir, he preparat una taula amb les mesures que he fet entre el centre de les puntes i la seva proporció (taula 1).

costat llarg mm	costat curt mm	Proporció Llarg/curt (x)	Diferència e mm $x - \phi$	Error $(\phi - x) \cdot 100/\phi$
28	10	2.800	-1.182	-73.050
35	20	1.750	-0.132	-8.156
53	30	1.767	-0.149	-9.186
68.5	40	1.713	-0.094	-5.838
81.5	50	1.630	-0.012	-0.740
97.5	60	1.625	-0.007	-0.431
114	70	1.629	-0.011	-0.651
130	80	1.625	-0.007	-0.431
146	90	1.622	-0.004	-0.259
162	100	1.620	-0.002	-0.122
179	110	1.627	-0.009	-0.571
194	120	1.617	0.001	0.084
212	130	1.631	-0.013	-0.787
228	140	1.629	-0.011	-0.651
243	150	1.620	-0.002	-0.122
260	160	1.625	-0.007	-0.431
276	170	1.624	-0.005	-0.340
293	180	1.628	-0.010	-0.602
307	190	1.616	0.002	0.139
324	200	1.620	-0.002	-0.122
405	250	1.620	-0.002	-0.122
485	300	1.617	0.001	0.084

Taula 1. Distància mesurada amb regla graduat entre el centre de les puntes dels segments llargs i curts de l'auròmetre, la proporció entre elles, la diferència entre ϕ i la proporció obtinguda, i l'error en tant per cent.

Com es pot veure a la taula 1 les mesures d'objectes de petites dimensions, és a dir, aquells objectes que tenen el costat petit d'una llargada inferior o igual a 40 mm, donen error superiors al 5% i s'han de considerar com no vàlides. La resta de mesures, fins objectes de dimensió ≤ 300 mm, tenen un error inferior al 1% i les dono per bones.

He provat de fer la mateixa prova agafant, en comptes de la distància entre el centre de les puntes, la distància interior entre puntes (figura 17.b de la pàgina següent). El resultat ha estat el següent:

costat llarg mm	costat curt mm	Proporció Llarg/curt (x)	Diferència e mm $x - \phi$	Error $(\phi - x) \cdot 100/\phi$
18.5	10	1.850	-0.232	-14.336
33.5	20	1.675	-0.057	-3.521
51.5	30	1.717	-0.099	-6.096
67	40	1.675	-0.057	-3.521
84	50	1.680	-0.062	-3.830
101	60	1.683	-0.065	-4.036
117	70	1.671	-0.053	-3.300
132	80	1.650	-0.032	-1.976
148.5	90	1.650	-0.032	-1.976
166	100	1.660	-0.042	-2.594
181	110	1.645	-0.027	-1.695
196	120	1.633	-0.015	-0.946
213.5	130	1.642	-0.024	-1.500
229	140	1.636	-0.018	-1.093
246	150	1.640	-0.022	-1.358
260	160	1.625	-0.007	-0.431
278	170	1.635	-0.017	-1.067
293	180	1.628	-0.010	-0.602
307	190	1.616	0.002	0.139
327	200	1.635	-0.017	-1.049
407	250	1.628	-0.010	-0.616
485	300	1.617	0.001	0.084

Taula 2. Distància mesurada amb regle graduat entre la part interior de les puntes dels segments llargs i curts de l'auròmetre, la proporció entre elles, la diferència entre ϕ i la proporció obtinguda, i l'error en tant per cent.

Com es pot veure a la taula 2, els errors obtinguts en la major part dels casos són superiors a 1%. Per aquest motiu, per mesurar he fet servir la distància entre el centre de les puntes.

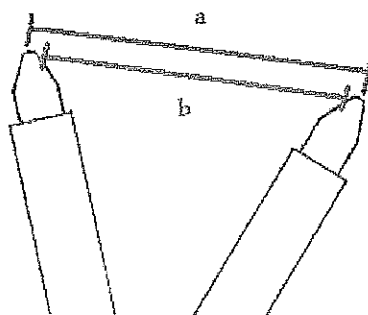


Figura 17.b. Amb blau està indicat com s'haurien de prendre les mesures amb l'auròmetre per tal que l'error de mesura sigui menor (des del centre de les puntes). Amb vermell està indicada la manera menys precisa de mesurar (des de l'interior de les puntes).

Exemple d'utilització de l'auròmetre:

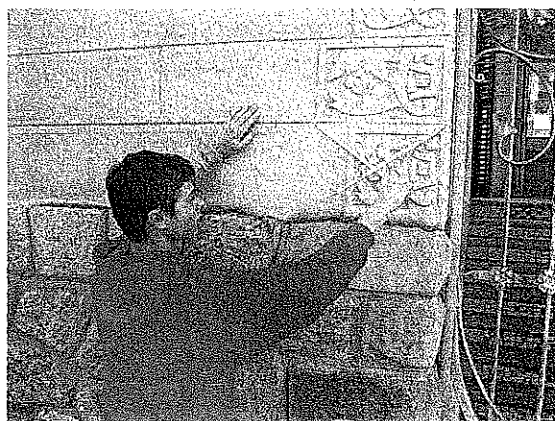


Figura 18. Utilització de l'auròmetre en un element decoratiu de la Torre Iris de La Garriga.

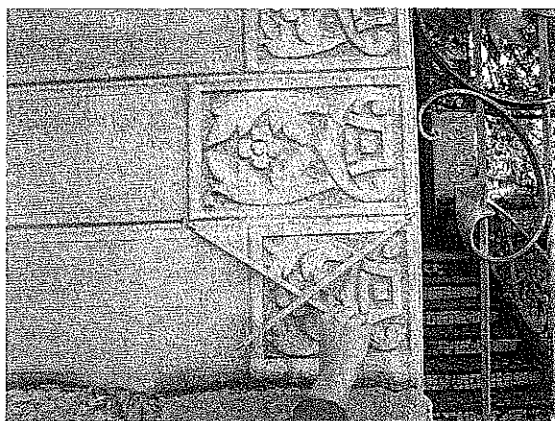


Figura 19. Obrim l'auròmetre fins a fer coincidir les puntes de l'extrem més llarg, amb la longitud major de l'element.

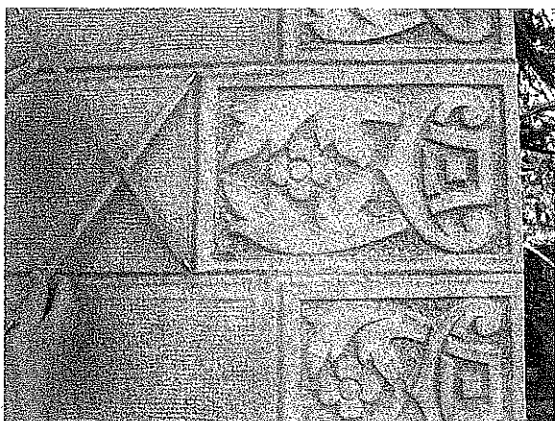
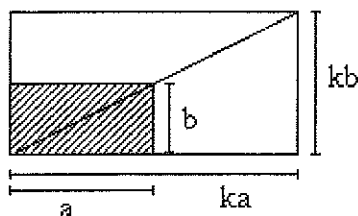


Figura 20. Si l'element té la proporció àuria, la distància entre les puntes dels extrems més curts, ha de coincidir amb la dimensió menor de l'element.

4.3. DETERMINACIÓ DE LA SECCIÓ ÀURIA SOBRE PLÀNOL O SECCIÓ

Hem vist al capítol 2.1 que si superposem dos rectangles semblants (els que mantenen la mateixa proporció entre els seus costats) fent coincidir un dels vèrtexs, les seves diagonals quedaran superposades.



Hi ha un procediment per trobar rectangles semblants que vaig aprendre a l'assignatura de dibuix. Es tracta de col·locar un costat del cartabò fent-lo coincidir amb la diagonal d'un rectangle de referència que té una proporció coneguda (per exemple Φ , $\sqrt{\Phi}$, $\sqrt{5}$ o Φ^2), i després desplaçar-lo lliscant sobre l'escaire. Si el mateix costat del cartabò coincideix amb la diagonal d'un altre rectangle, aquest tindrà la mateixa proporció. A les figures següents, mostro gràficament com es fa.

Exemple per buscar rectangles semblants sobre plànols o seccions:

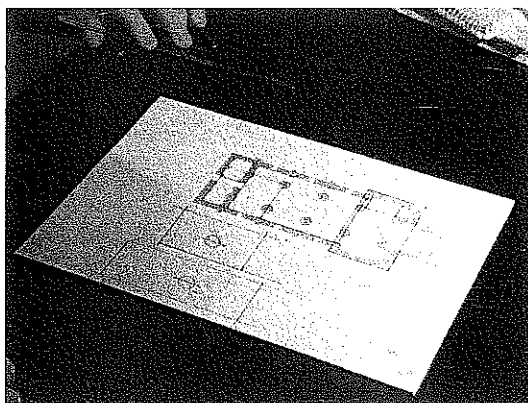


Figura 21. Planta de l'església a analitzar i rectangles de referència amb les proporcions Φ i Φ^2 .

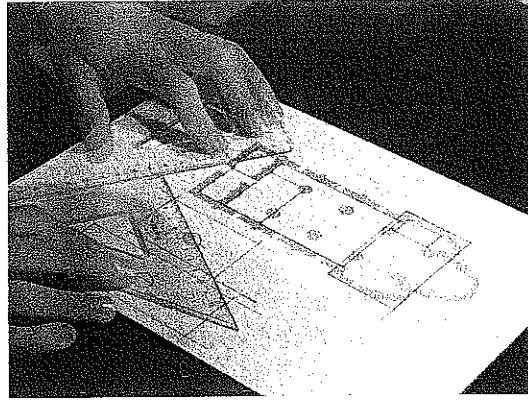
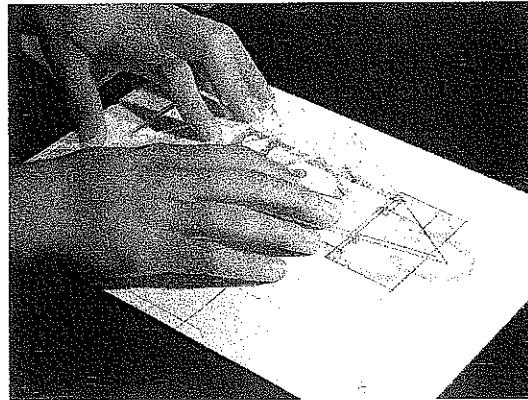
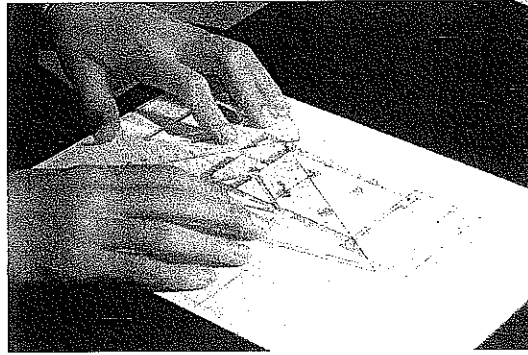


Figura 22. Superposo el costat del cartabò a la diagonal del rectangle de referència que té proporcions àuries (en aquest cas té proporció Φ).



Figures 23 i 24. Desplaço el cartabò sobre l'escaire buscant rectangles semblants.

5. EL NOMBRE D'OR AL MODERNISME

En aquest apartat he fet la recerca sobre les proporcions àuries a l'arquitectura modernista. Tal i com està demostrat en diversos estudis (Bonell, 1999; Ghyka, 1978) molts estils arquitectònics es basen en proporcions relacionades amb el nombre d'or. Això és molt evident i fàcil de demostrar en els estils romànic i gòtic, però el meu treball intenta descobrir si aquestes proporcions es troben també en el modernisme. És per això que primer presento una pràctica de buscar aquestes proporcions en una planta romànica, després en una planta gòtica i finalment entro de ple en el Modernisme.

Abans de seguir, explicaré breument que és el Modernisme. El Modernisme és un moviment artístic que es va desenvolupar durant el final del segle XIX i el primer quart del segle XX. Es caracteritza en l'aspecte estètic per un retorn a la natura, formes gracioses, ondulades, delicades... en les que sovint trobem vegetals, flors, insectes, peixos, sirenes, dracs i ocells de colors amb cues espectaculars. El Modernisme va trobar la seva expressió en formes d'art ben diferents, en arquitectura, ceràmica, ferro forjat, interiors amb parets corbes, decoració exagerades, etc.

El Modernisme a Catalunya va tenir una fantàstica expansió, ja que el país estava obert a les corrents procedents d'Europa, per tal de remarcar les seves diferències amb Espanya i reforçar els seu nacionalisme polític, en un període liderat per la "Renaixença" després d'un llarg període de decadència originat per la derrota del 1714 i la consegüent pèrdua dels drets i institucions nacionals.

Les idees de Ruskin i Violet-le-Duc i l'estètica de William Morris, Walter Crane, Mackmurdo, Mackintosh, etc. van ser acceptades com a base de la renovació artística. Arquitectes com Gaudí, Domènech i Montaner, Puig i Cadafalch i altres, varen ser líders d'aquest moviment.

De fet, el Modernisme representa a tot el món i en especial a Catalunya la llibertat per la creació de noves formes anteriorment no acceptades, traient l'art de l'encarcament acadèmic. El modernisme és un estil molt innovador que trenca amb tots els estils anteriors i es basa en les formes irregulars de la natura, és per això que trobar proporcions en el modernisme pot ser més complicat.

En aquest apartat destacaré aquells aspectes essencials per tal de demostrar l'ús notable i conscient de la secció àuria en diversos plànols de plantes i seccions d'alguns edificis gòtics, romànics i sobretot modernistes. He marcat les construccions geomètriques de les plantes amb rectangles de diferents colors segons el seu mòdul. Així, els rectangles d'or són de color vermell, els rectangles amb proporció Φ^2 de color verd, els rectangles amb proporció $\sqrt{\Phi}$ de color taronja i els rectangles amb proporció $\sqrt{5}$ de color blau. Aquesta última proporció esmentada, $\sqrt{5}$, m'ha semblat interessant buscar-la ja que és una proporció directament relacionada amb el nombre d'or, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Les plantes de les esglésies romànica i gòtica que presento, les he tret de les publicacions que he consultat. Les plantes modernistes les he trobat en una col·lecció de diapositives de l'obra de Gaudí (Huerta, 1986) i en els plànols que em va facilitar l'arquitecte Lluís Cuspinera de l'Illa Raspall de la Garriga.

5.1. SANT VICENÇ DE CARDONA

Sant Vicenç és una església d'estil romànic lombard situada a Cardona. Se sap que aquesta ja existia al segle X, ja que documents del 981 i 985 en feien esment. L'autor d'aquesta obra és desconegut. Al 1019, Bremund, el vescomte de Cardona va proposar de bastir una nova església i aquell mateix any ja es va començar la restauració i dedicació de Sant Vicenç. L'obra va finalitzar satisfactòriament el 1040 en mans d'Eriball.

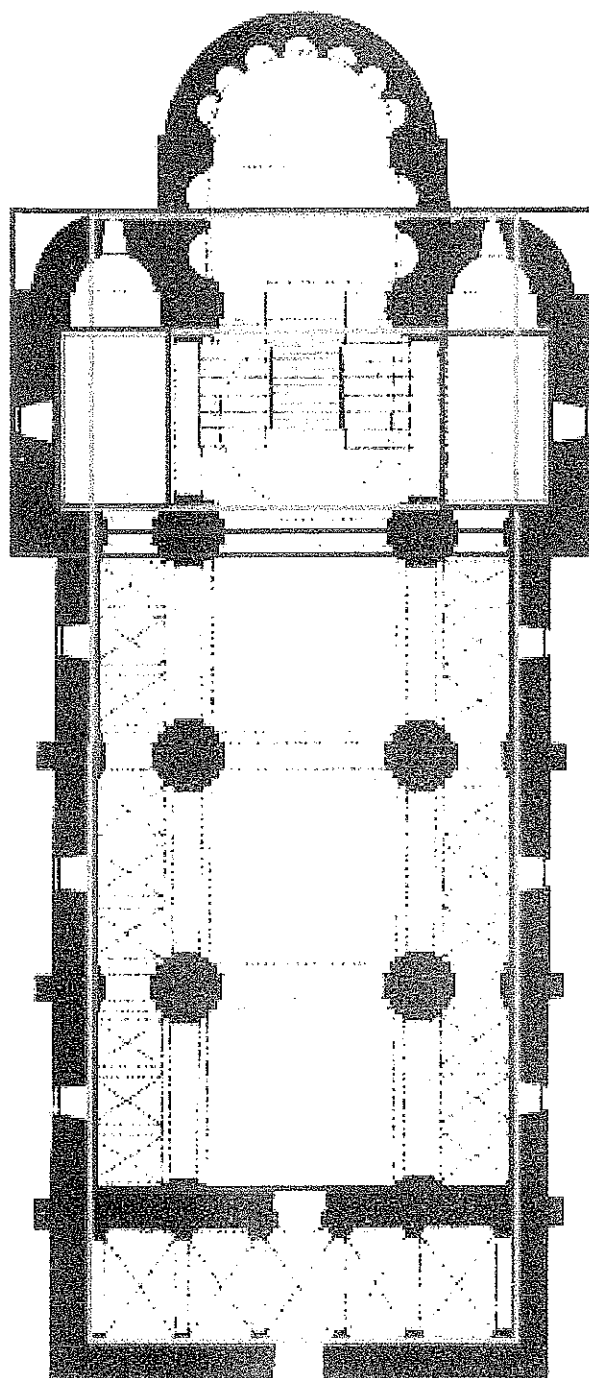
L'edifici de 1019-40 existeix encara avui, tristament mutilat, ja que, a causa de la importància estratègica del castell, al segle XVIII l'església fou convertida en caserna.

La primera làmina és la planta d'aquest edifici que, com es pot veure, consisteix en una nau central i dues laterals, transepte, un creuer amb cúpula, tres àbsis i una cripta.

Tal i com està dibuixat a la planta he trobat dues proporcions relacionades amb el nombre d'or que es repeteixen en diverses parts de l'edifici. Aquestes proporcions que he trobat són Φ^2 i el mateix Φ . De rectangles Φ^2 n'he trobat dos, un que comprèn tot l'interior del transepte i un altre que engloba la nau central i les laterals des de la mateixa porta d'entrada fins els àbsides laterals. De rectangles amb proporció Φ n'he trobat més encara, un que emmarca tot el transepte per la banda exterior i inclou els àbsides laterals, un altre que queda dibuixat agafant la part interior de la nau principal més les laterals fins arribar al transepte, i per últim he trobat que els dos extrems del transepte formen també, per la part interior, dos d'aquests mateixos rectangles.

El fet de trobar tant fàcilment aquestes proporcions m'ha servit per comprovar com en són de comunes les proporcions àuries en l'arquitectura romànica.

Planta de l'església de Sant Vicenç de Cardona:



Φ

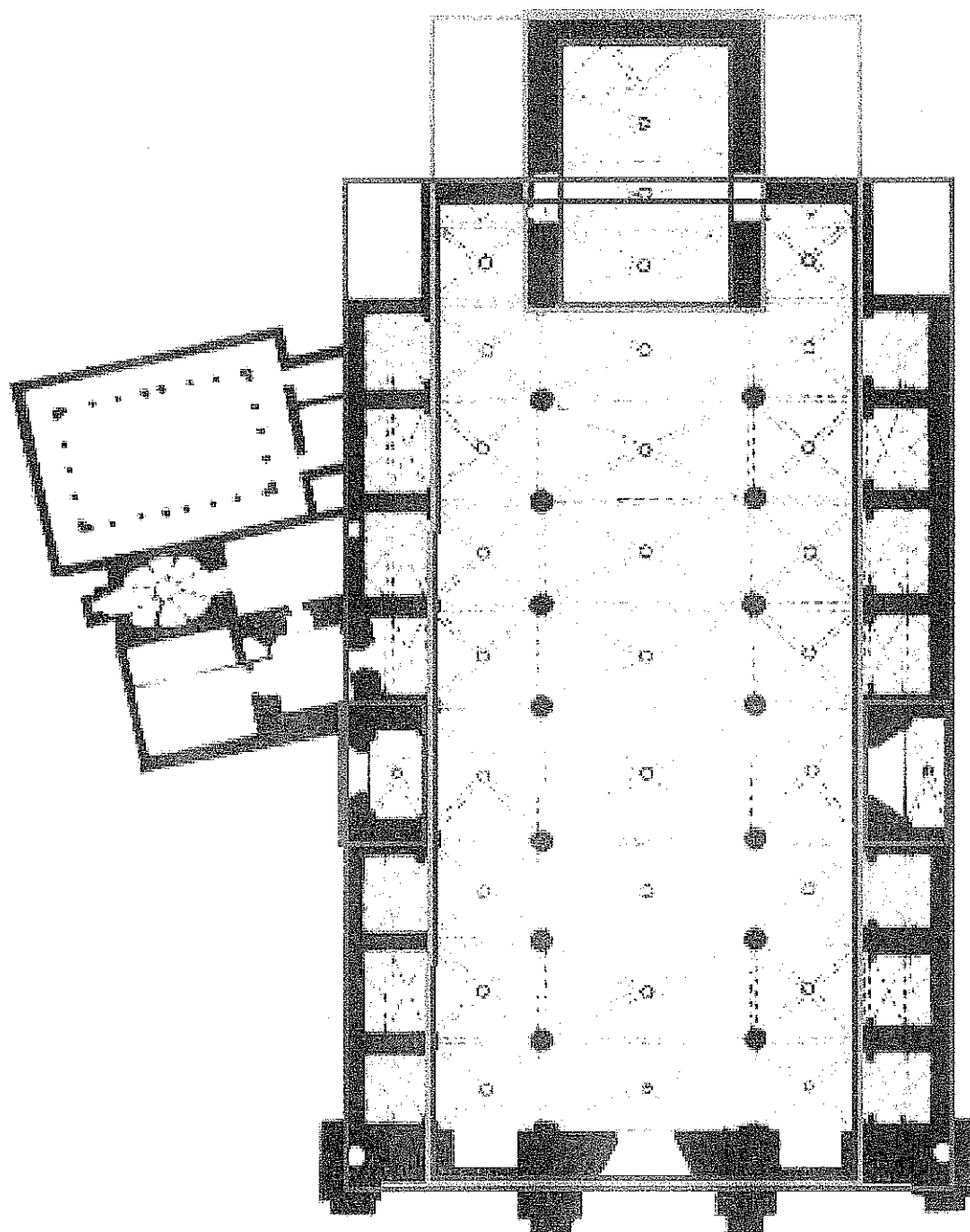
Φ^2

5.2. CATEDRAL DE MALLORCA

Jaume I va conquerir l'illa de Mallorca l'any 1229 i de seguida va decidir construir una catedral sobre l'emplaçament de la mesquita islàmica Almudaina, que mentrestant es feria servir per al culte cristià. La construcció de la catedral es va iniciar el 1306 per la capella de la Trinitat, on el rei Jaume II de Mallorca, fill de Jaume I va voler ser enterrat. S'ignora el nom del primer mestre d'obres, encara que es pensa que podria ser obra del mallorquí Jaume Fabre o, potser, Ponts DescLOT. Se sap que els que van succeir van ser: Beranguer Ostalets (1345), Pere Mates (1356), Jaume Mates (1368), Guillem Ses Oliveres (1390), Pere Massot (principi segle XV), Guillem Sagrera (1420), Arnau Piris (1447) i Joan Sagrera (1481).

La Catedral de Mallorca és d'estructura gòtica arcaica d'absis quadrangulars i paral·lels. La seva planta té una forma rectangular que fent les mesures corresponents he pogut comprovar que és un rectangle d'or. L'absis central també és un rectangle amb proporció Φ si es mesura l'espai interior i si prenem les mesures exteriors d'aquest mateix absis surt un rectangle $\sqrt{\Phi}$. He trobat la proporció Φ^2 agafant l'espai de la nau interior sense les capelles laterals i fins al fons de l'absis central, i el rectangle $\sqrt{5}$ si mesurem fins als absis laterals.

Planta de la Catedral de Mallorca:



Φ

Φ^2

$\sqrt{\Phi}$

$\sqrt{5}$

5.3. PALAU EPISCOPAL D'ASTORGA

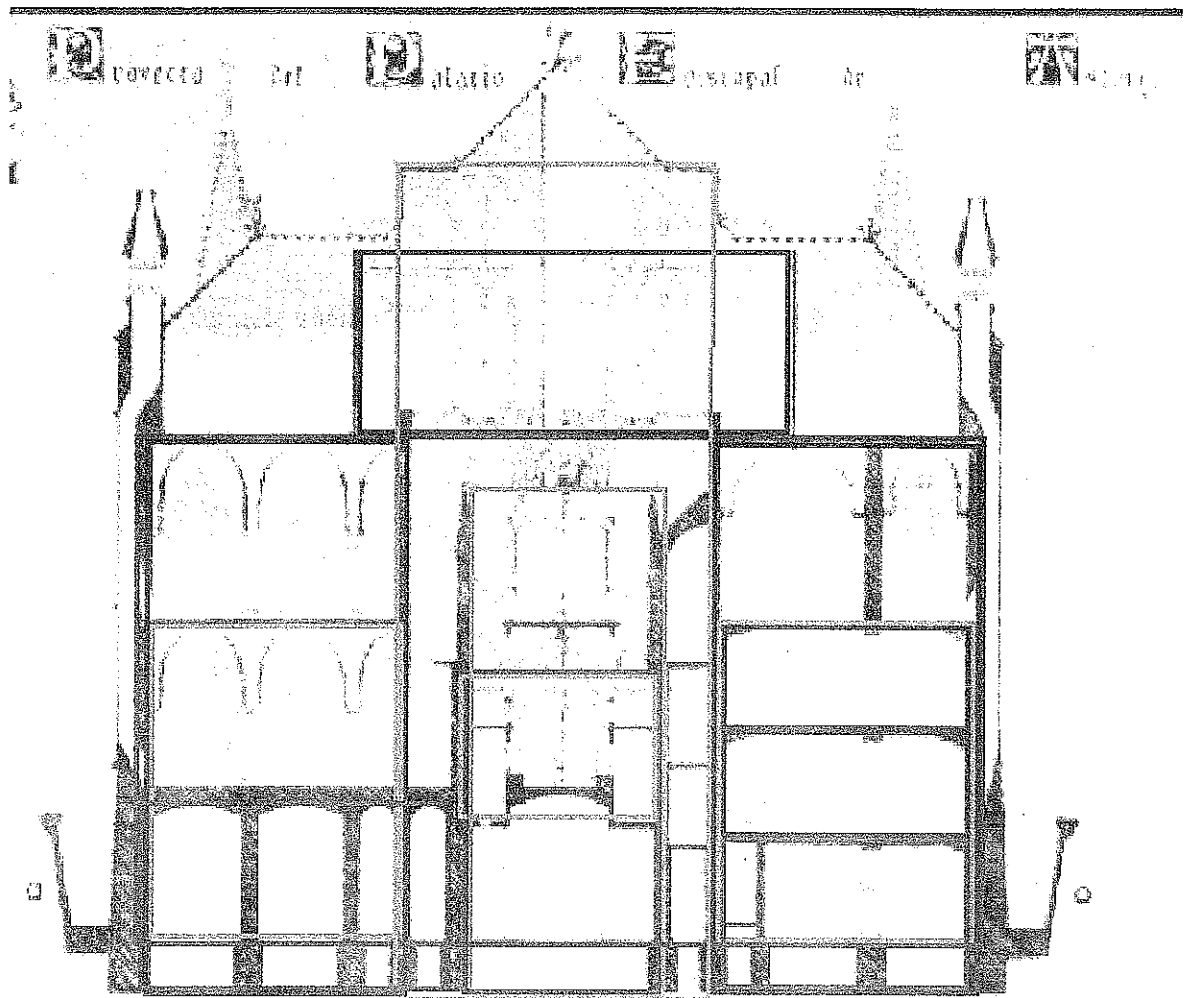
L'any 1886 un incendi destrueix el Palau Episcopal d'Astorga, província de León, el bisbe Joan Baptista Grau (natural de Reus) li encarrega l'edifici a Antoni Gaudí, que comença les obres el 1888.

L'edifici té una planta central envoltada per un fossar emmarcat per quatre torres cilíndriques a cada vèrtex. L'entrada és un pòrtic amb arcs i un vestíbul central que fa de distribuïdor cap a les dependències del voltant. És una obra modernista però d'aparença gòtica per tal d'integrar-se en el context històric i geogràfic.

Treballant el perfil del Palau Episcopal d'Astorga he trobat que puc emmarcar l'edifici, excepte la teulada en un rectangle auri i que altres estances menors també tenen aquesta proporció. Els rectangles amb la proporció $\sqrt{\Phi}$ es troben englobant diversos nivells. També he trobat que agafant els laterals del perfil surten dos rectangles amb proporció $\sqrt{5}$ i un tercer en el pis superior. Per últim, els rectangles amb proporció Φ^2 els trobem en vertical en tota la part del vestíbul central i dintre d'aquest un altre fins al final de les columnes.

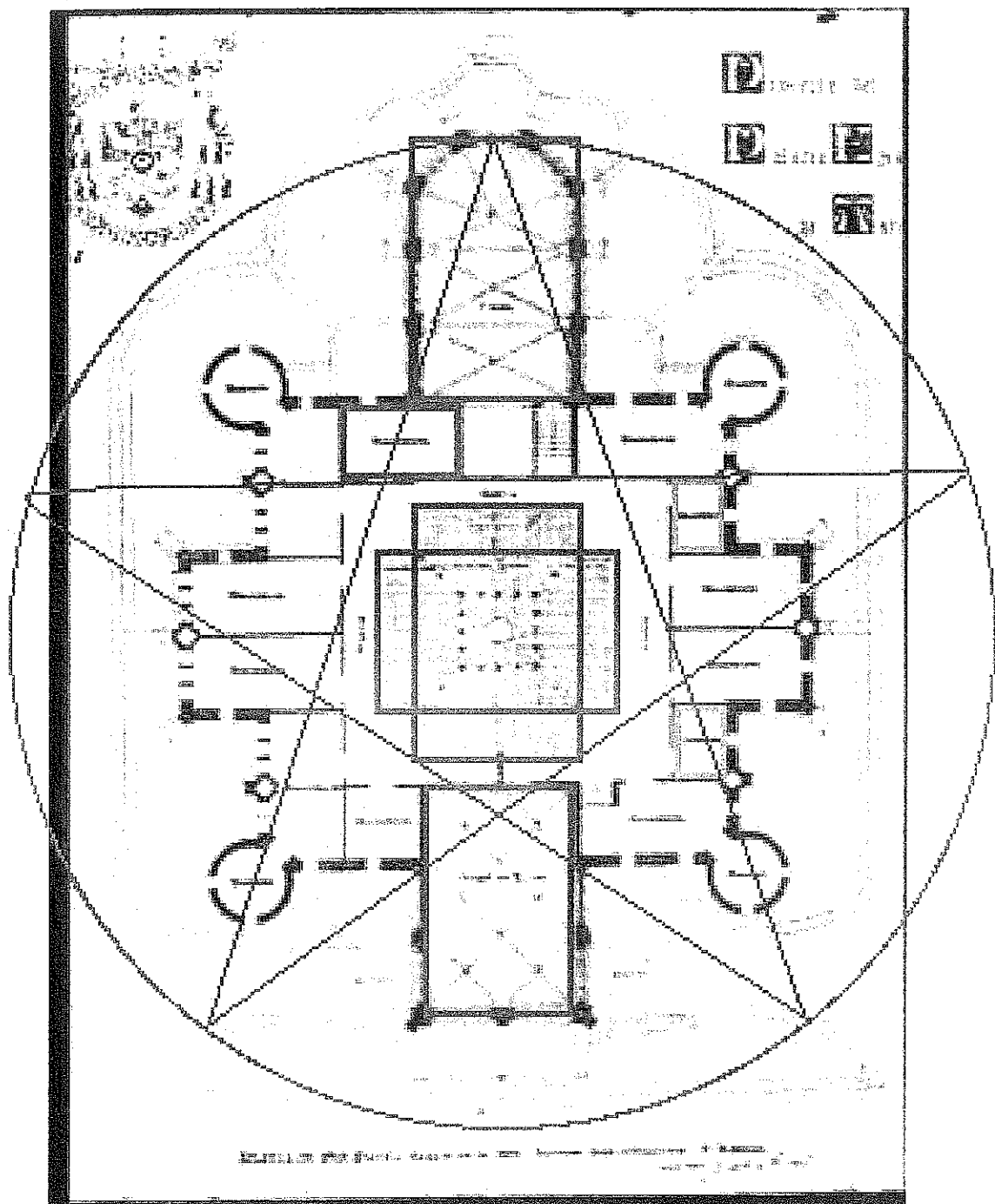
El conjunt de la planta del Palau Episcopal d'Astorga té una simetria que l'he pogut relacionar amb l'estrella pentagonal. El pentàgon central de l'estrella conté la part central del palau i divideix la resta d'elements d'una manera harmònica. La teulada central està formada per dos rectangles d'or creuats i de la mateixa mida. Dos altres rectangles auri que he pogut apreciar fàcilment que corresponen a l'entrada i a l'estança en forma d'absis oposat a l'entrada.

Perfil del Palau Episcopal d'Astorga:



Φ	Φ^2
$\sqrt{\Phi}$	$\sqrt{5}$

Planta del Palau Episcopal d'Astorga:



Φ	Φ^2
$\sqrt{\Phi}$	$\sqrt{5}$

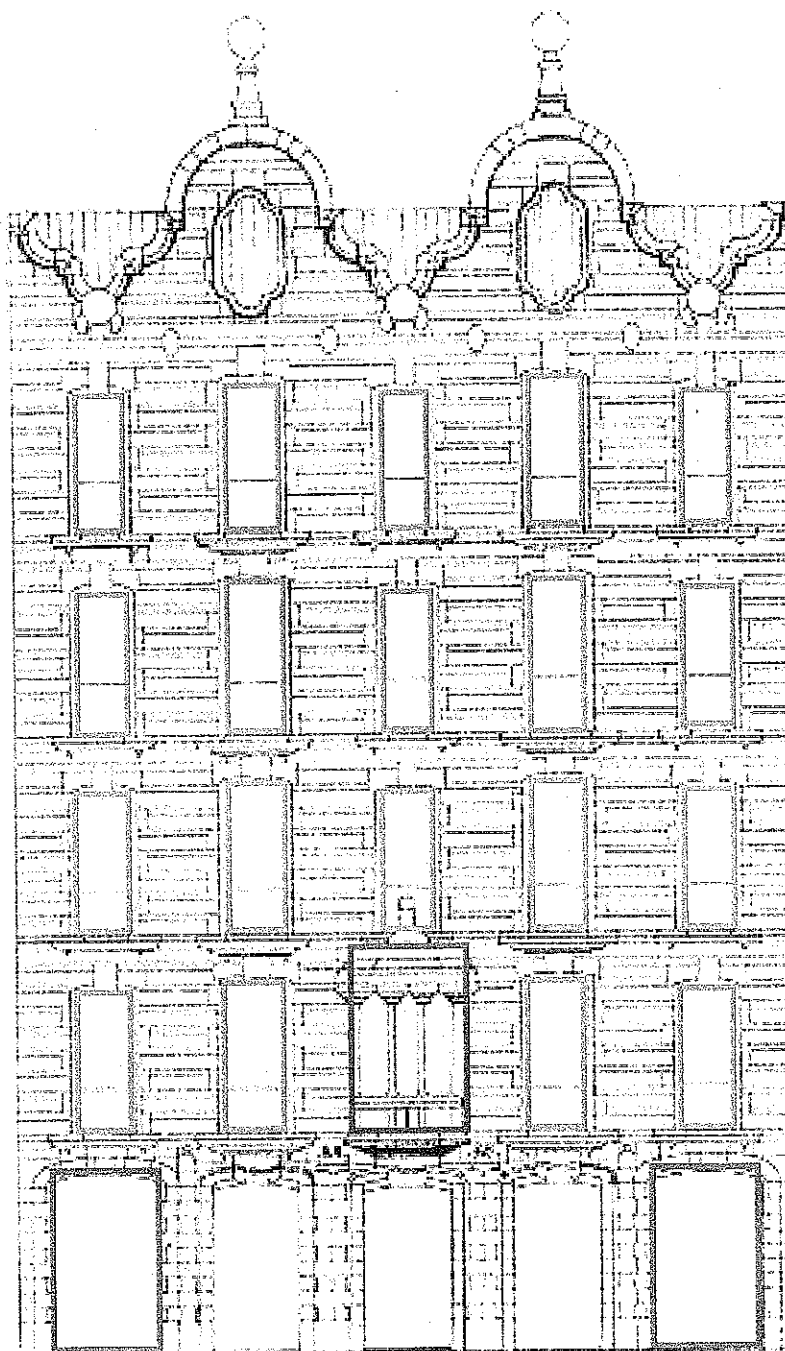
5.4. CASA CALVET

La Casa Calvet va ser projectada per Gaudí per a una família que tenia una empresa tèxtil. Es va començar a construir el 1898 i es va acabar el 1904. La poca amplada del solar limita la forma de la planta. La façana davantera és de pedra treballada, hi ha cinc balcons per planta que fan entrades i sortides. És especialment remarcable la recarregada tribuna central que hi ha al primer pis.

A la façana de la casa, la proporció més evident és que totes les finestres són rectangulars i mantenen la proporció Φ^2 . El rectangle auri l'he trobat en la tribuna central i també en les dues portes dels extrems de la planta baixa.

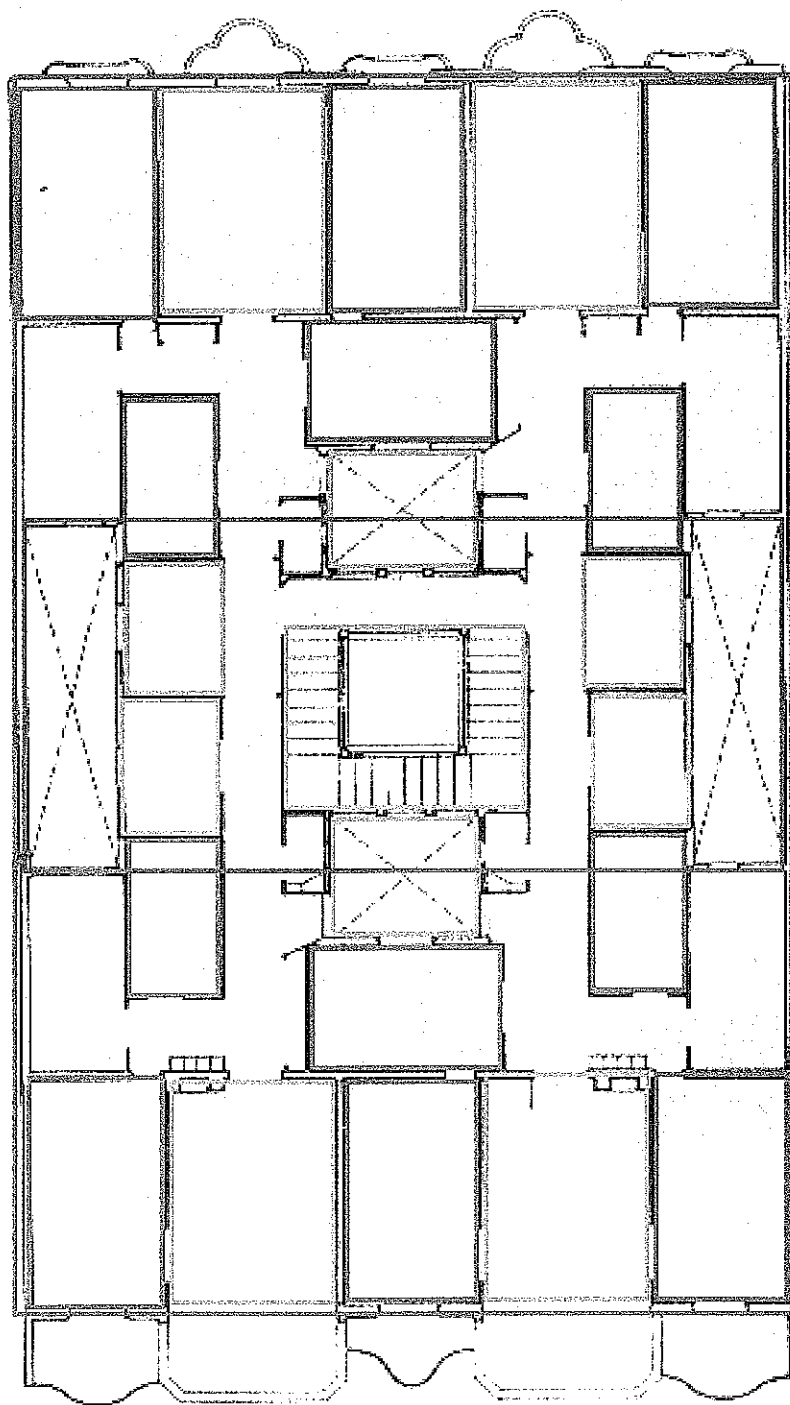
El conjunt de la planta de la Casa Calvet, sense comptar els balcons, forma un rectangle amb proporció Φ . Totes les habitacions de la planta, mantenen la proporció àuria o bé la proporció $\sqrt{\Phi}$. També he trobat un rectangle $\sqrt{5}$ que inclou els dos patis de llum d'una banda a l'altra.

Façana de la Casa Calvet:



Φ	Φ^2
$\sqrt{\Phi}$	$\sqrt{5}$

Planta de la Casa Calvet:



Φ	Φ^2
$\sqrt{\Phi}$	$\sqrt{5}$

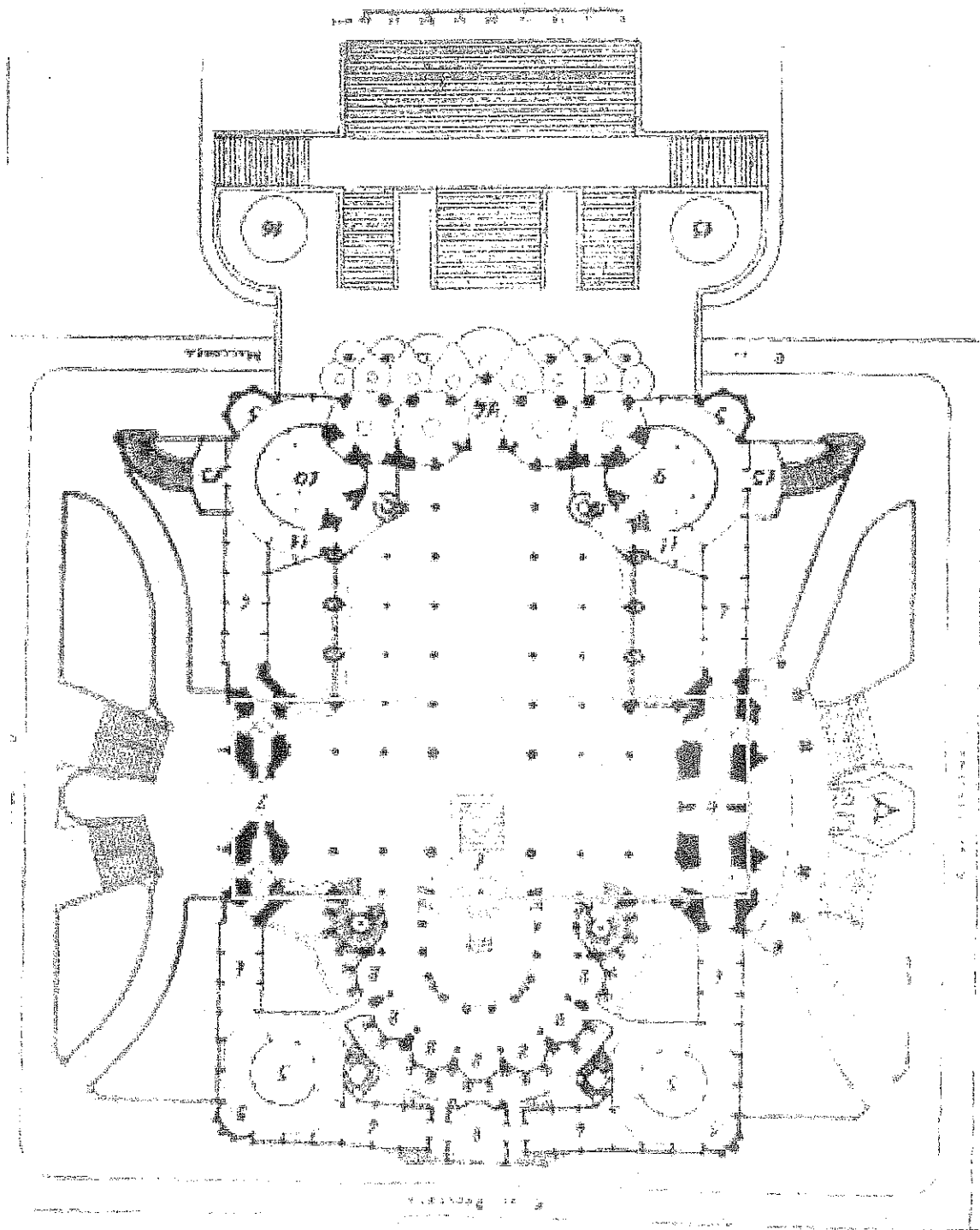
5.5. LA SAGRADA FAMÍLIA

La Sagrada Família es va començar a construir l'any 1882 segons un projecte neo-gòtic de l'arquitecte Francesc de Paula del Villar. Antoni Gaudí li va agafar el relleu un any més tard, tenia 32 anys i hi va treballar durant 43 anys més. Gaudí va canviar tota la concepció de l'obra, la va convertir en un gran projecte modernista. Quan va morir va deixar l'obra inacabada, però amb moltes pistes per a prosseguir-la, cosa que s'està fent avui en dia.

El gran temple de la Sagrada Família tindrà tres façanes: Naixement, Passió i Glòria; amb quatre campanars cadascuna. Tindrà també un absis amb set capelles, cinc naus disposades en planta de creu llatina i amb capacitat per a dues mil persones, i una gran torre central o cimborri de 170 metres d'alçària que serà l'element més identificador del temple.

A la planta de la Sagrada Família només he trobat un rectangle, el de proporció Φ^2 que correspon al transcepte, és a dir, a la nau que creua la nau principal. En cap altre part de la planta he pogut trobar cap més proporció. També he provat de dibuixar l'estrella pentagonal en algun lloc d'aquest plànol i no coincidia enlloc.

Planta de la Sagrada Familia:



Φ	Φ^2
$\sqrt{\Phi}$	$\sqrt{5}$

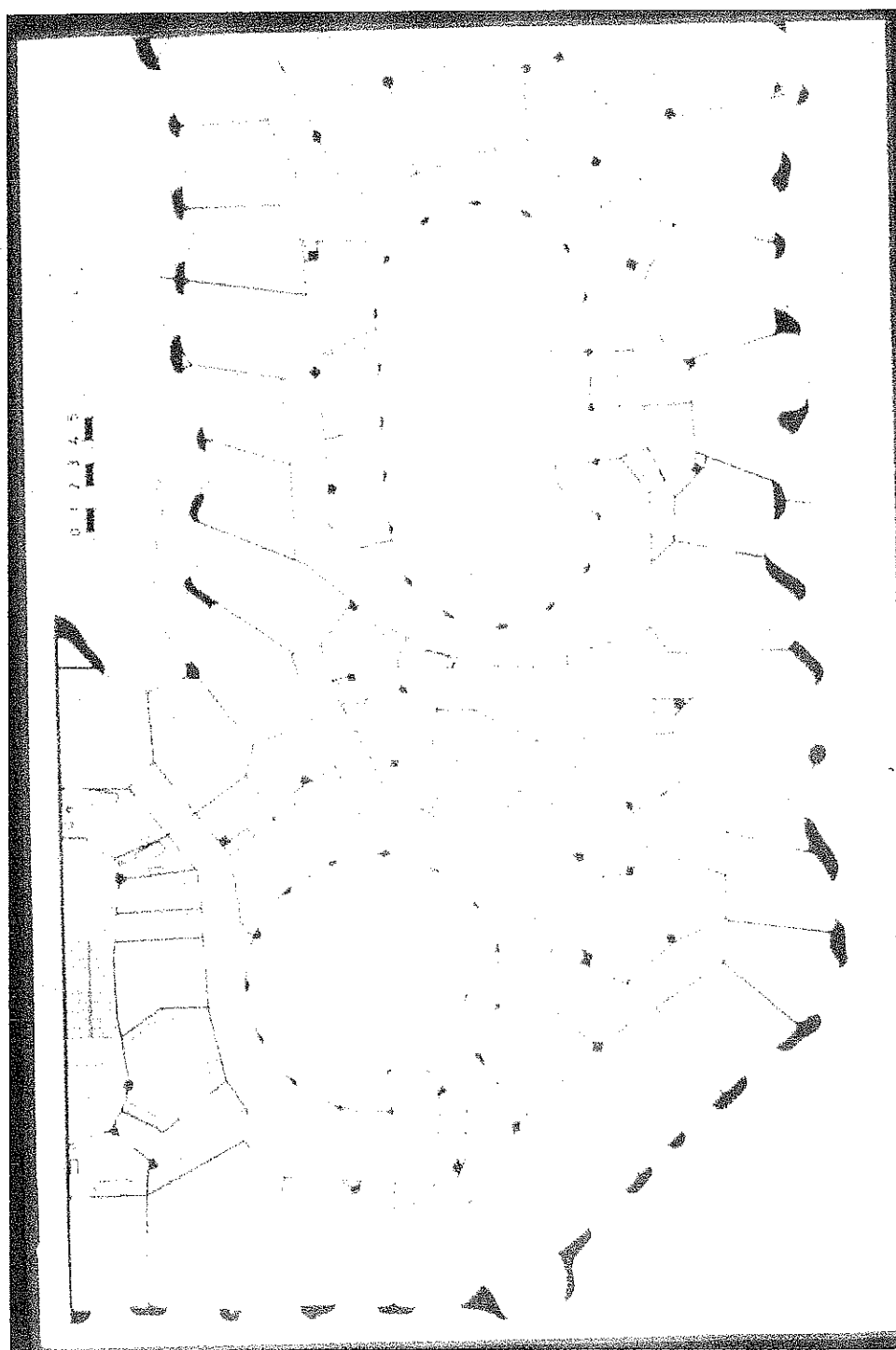
5.6. LA CASA MILÀ (LA PEDRERA)

La casa Milà, més coneguda com la Pedrera, és com una escultura gegant plena de sorpreses: el terrat dels guerrers, la planta lliure, els patis de veïns aptes per a la circulació... Gaudí va construir la Pedrera per a Pere Milà i Roger Segimon, tots dos gent adinerada, però que no van estar d'acord amb l'augment vertiginós de les despeses de construcció de l'edifici, molt per damunt del pressupost inicial. Fins i tot van posar un plet a Gaudí per qüestió dels honoraris, plet que Gaudí va guanyar. Tot i els entrebancs, la casa es va fer i Gaudí va signar la finalització d'obres l'any 1912.

Gaudí va concebre la planta lliure, a la Pedrera no hi ha parets de càrrega, l'edifici se sosté sobre una estructura de pilars i jàsseres (bigues metàl·liques) que formen un entramat sobre el qual es construeixen les voltes. Per sostenir la façana de pedra, els acabaments de les jàsseres es van fer doblegar en forma de T, fent servir tècniques d'enginyeria naval. Amb aquesta estructura, els envans i la façana no suporten càrregues i, per tant, es poden posar i treure com es vulgui.

En la planta d'aquest projecte tan innovador de Gaudí, on predominen les línies corbes i els espais irregulars, no he pogut trobar el més mínim índex de cap de les proporcions àuries.

Planta de la Casa Milà:



Φ	Φ^2
$\sqrt{\Phi}$	$\sqrt{5}$

5.7. CASA BARBEY

La Casa Barbey va ser construïda a la Garriga l'any 1810 per l'arquitecte Manuel Raspall i Mayol.

Manuel Raspall era l'arquitecte municipal d'un bon nombre de poblacions del Vallès Oriental que tingueren un gran creixement durant el primer terç del segle XX, com Cardedeu, l'Ametlla del Vallès, Cànoves, la Garriga, etc. Com altres arquitectes modernistes, Raspall també dissenyava la totalitat o part dels elements d'acabat: rajoles, trencadís, mosaic, ferro, guix, pintura...

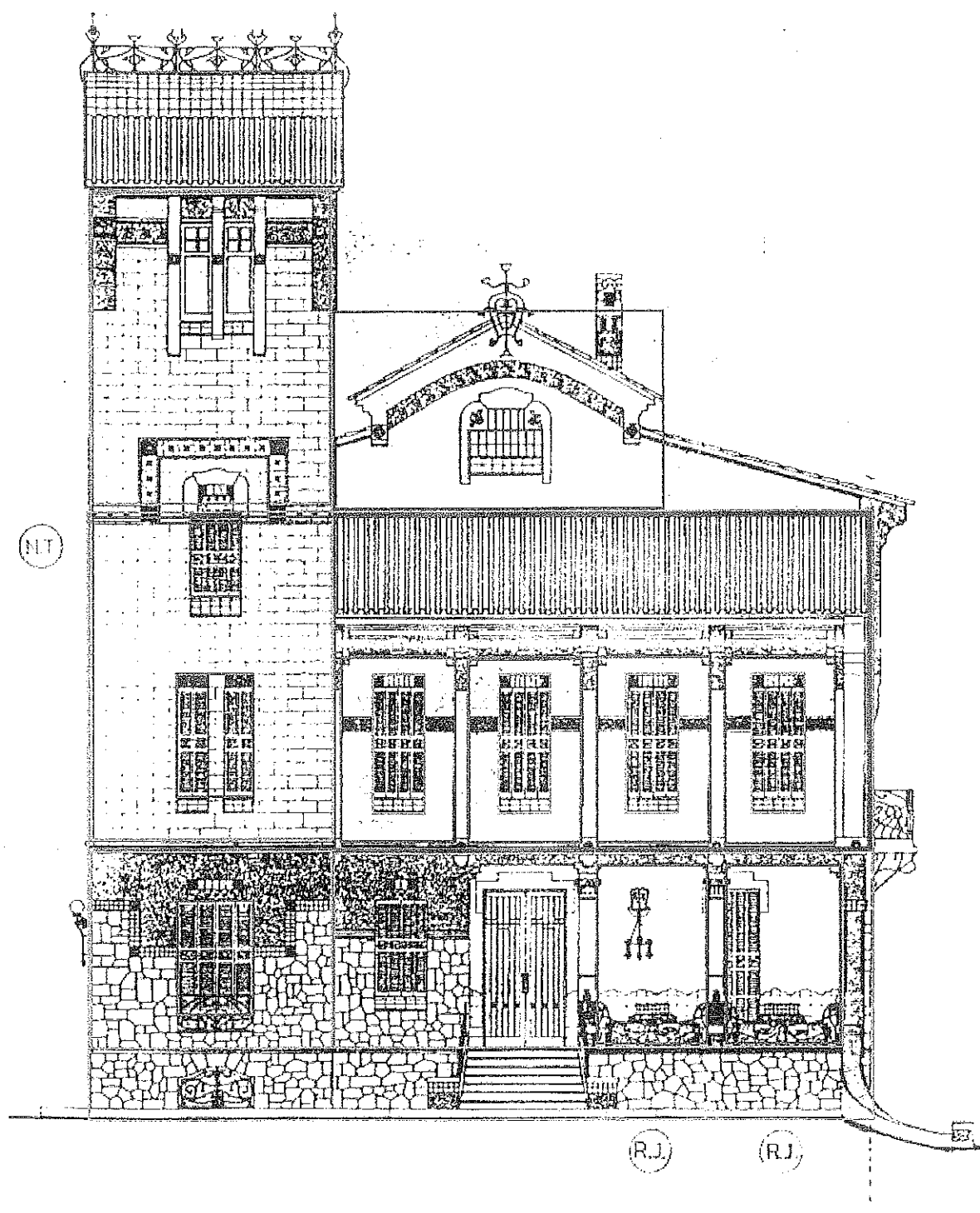
La casa Barbey forma part de l'Illa Raspall que es troba al començament del passeig i que és un conjunt de cases modernistes construïdes per Manuel Raspall.

A la façana de Can Barbey és l'edifici on he trobat més proporcions relacionades amb el número d'or. La totalitat de la façana principal exceptuant la part que sobresurt de la torre forma un rectangle de proporció $\sqrt{\Phi}$ i en dues de les subdivisions de la torre també ha sortit la mateixa proporció. La proporció Φ es troba en tots els espais entre columnes de la façana, emmarca el primer pis junt amb la teulada i es troba també en la major part de les finestres de la torre. La proporció $\sqrt{5}$ dona al dividir l'amplada entre l'altura del segona planta i també en el rectangle que forma la teulada de la torre quan s'observa aquesta des de davant. Finalment, els rectangles amb proporció Φ^2 es repeteixen en els quadrilàters que formen varies de les finestres de la casa. Part de la torre i part de la primera planta també manté aquestes últimes proporcions.

A la primera planta de la casa Barbey, les proporcions àuries són més escasses: He trobat un rectangle amb proporció Φ en una habitació, quatre rectangles de proporció $\sqrt{\Phi}$ en altres estances i un rectangle Φ^2 en un petit passadís.

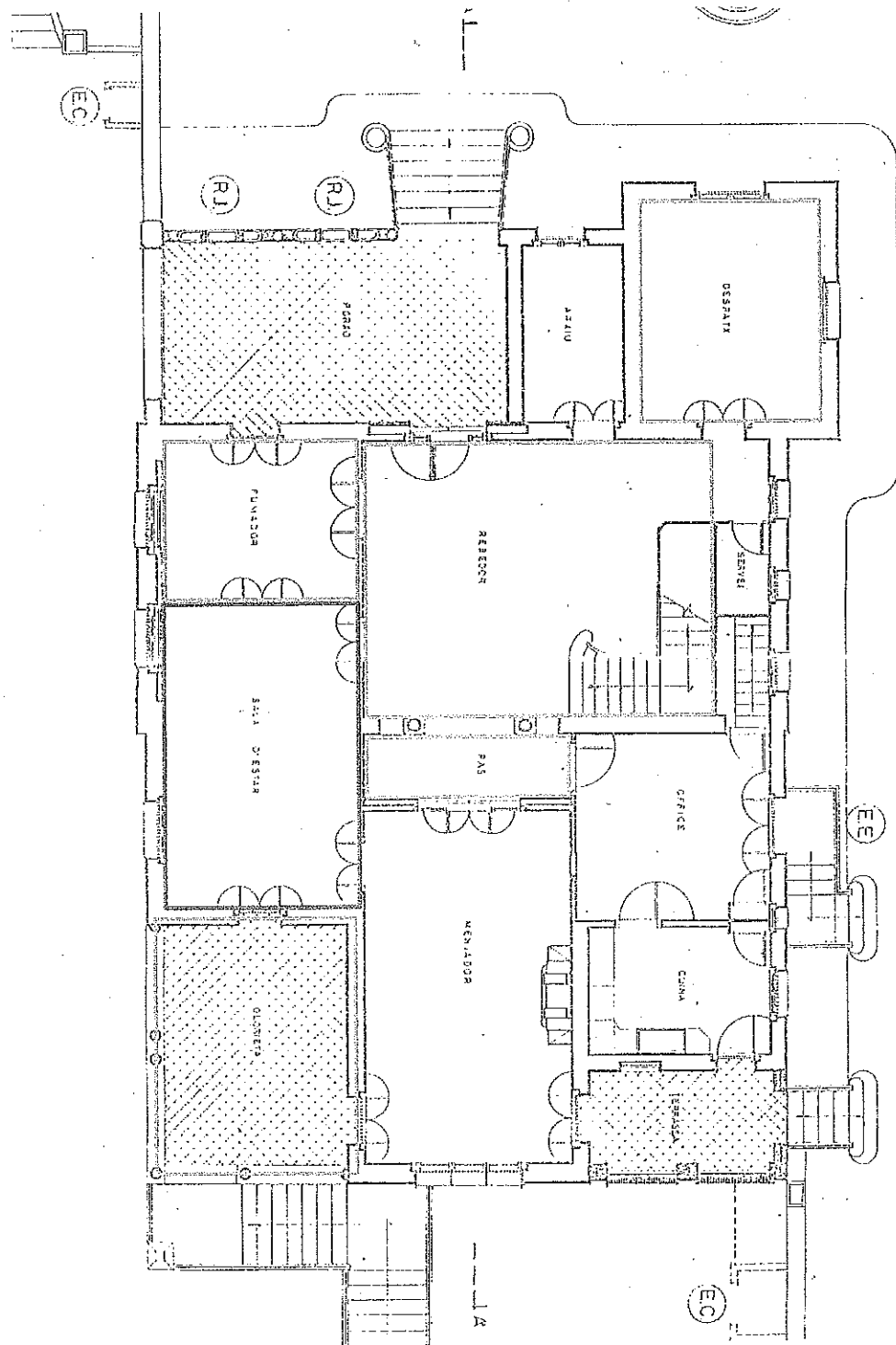
A la segona planta, tots els rectangles amb proporcions relacionades amb el número d'or estan formades per diferents habitacions. Una de les terrasses, la més gran, està formada per un rectangle amb proporció $\sqrt{\Phi}$ i un altre amb proporció $\sqrt{5}$. La biblioteca, forma un rectangle $\sqrt{\Phi}$. Altres rectangles auriis d'aquesta planta estan formats per diverses estances.

Façana de la Casa Barbey:



$$\begin{array}{cc} \Phi & \Phi^2 \\ \sqrt{\Phi} & \sqrt{5} \end{array}$$

Planta de la primera planta de la Casa Barbey:



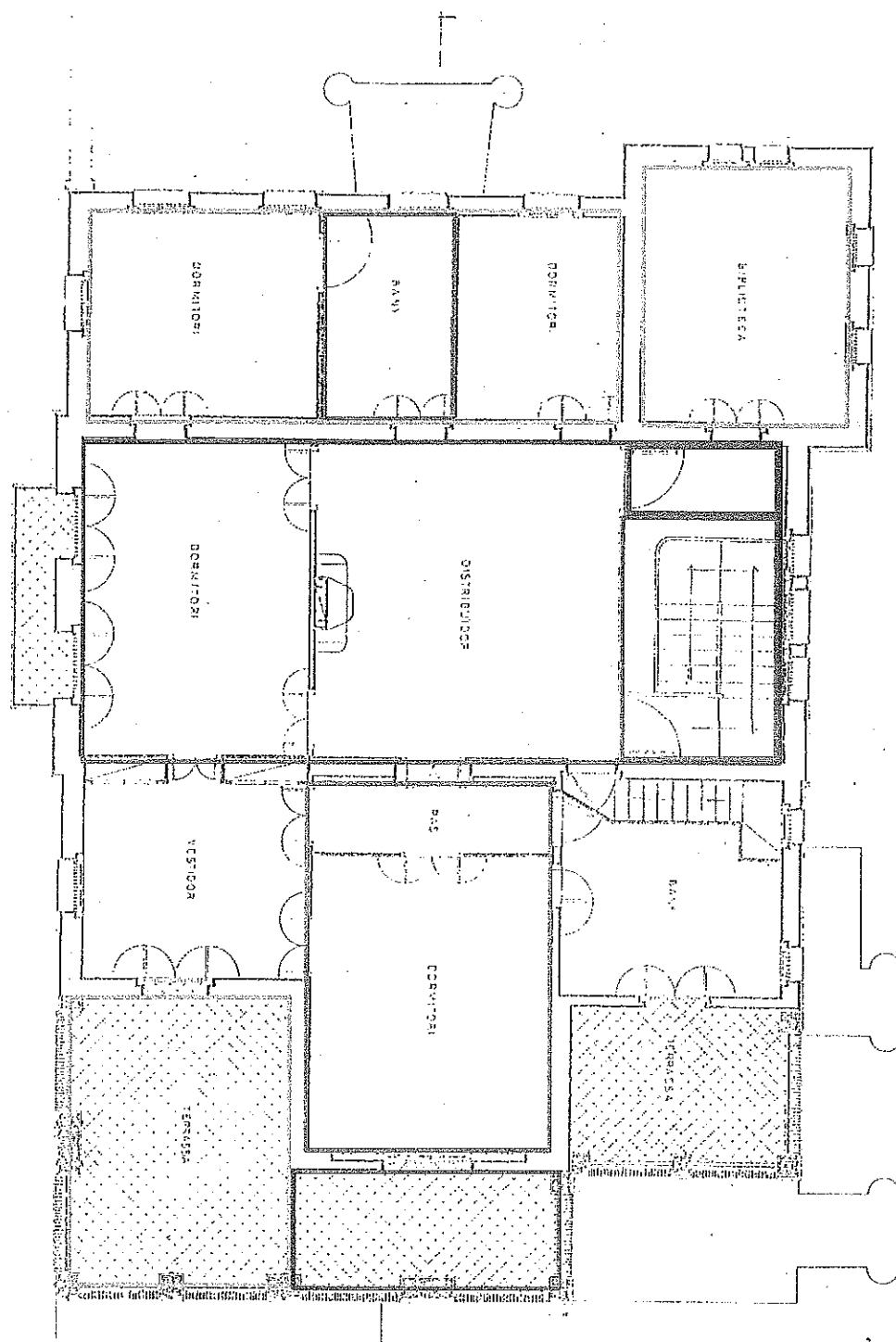
Φ

Φ^2

$\sqrt{\Phi}$

$\sqrt{5}$

Planta de la segona planta de la Casa Barbey:



Φ Φ^2
 $\sqrt{\Phi}$ $\sqrt{5}$

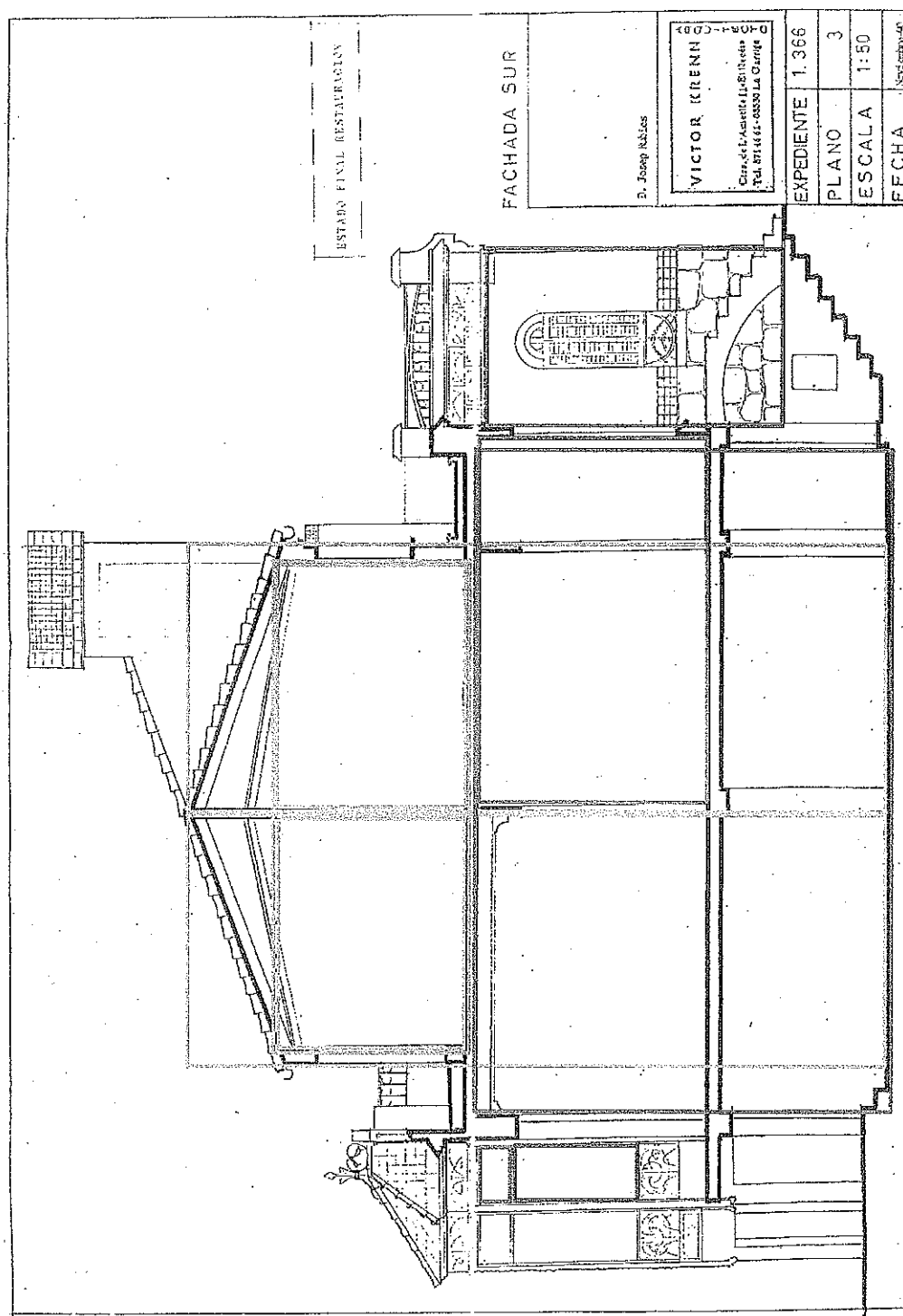
5.8. LA BOMBONERA

La Bombonera va ser construïda el 1910, és una altra casa de Manuel Raspall i és un dels edificis que componen l'Illa Raspall.

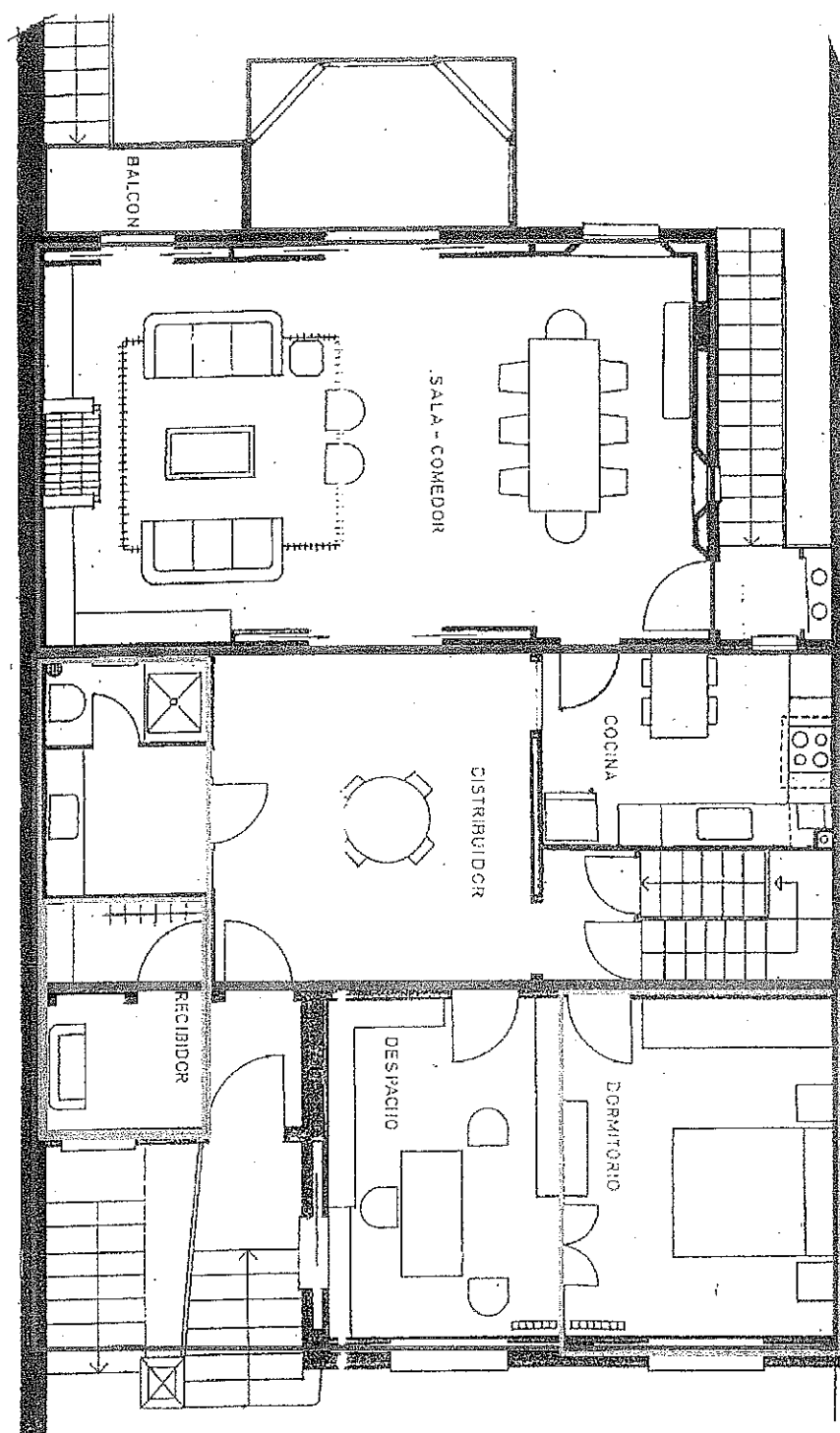
En el plànol del perfil de la casa hi he trobat algunes proporcions àuries. Un rectangle de proporció Φ emmarca l'estructura del semi-soterrani més la planta principal, també és un d'aquests rectangles l'estructura que forma l'annex del costat de l'escala de l'entrada. La proporció entre l'amplada i l'alçada de cada una de les dues estances de l'última planta és $\sqrt{\Phi}$. Tota l'estructura de l'última planta manté la proporció Φ^2 , i des de la base de la casa fins l'alçada màxima de la teulada i amb l'amplada de la part coberta de l'últim pis es poden apreciar (veure la pàgina següent) dos rectangles més de proporció Φ^2 . Per últim, cada una de les finestres de la galeria de la façana posterior, estan formades per dos rectangles de diferent proporció, un $\sqrt{5}$ i l'altre Φ .

En el plànol de la planta baixa de la Bombonera hi podem apreciar: el menjador que correspon exactament a un rectangle d'or; la galeria, inscrita en un altre rectangle de la mateixa proporció; el dormitori, que és un rectangle de proporció $\sqrt{\Phi}$; i el balcó en forma de rectangle $\sqrt{5}$. També, a nivell de grans espais, apreciem un rectangle de proporció $\sqrt{5}$ que emmarca el dormitori, el despatx, les escales del davant i el rebedor; i un altre rectangle de la mateixa proporció i mida que emmarca la cuina, l'escala interior, el distribuïdor i el bany.

Perfil de la Bombonera:



Planta de la Bombonera:



6. CONCLUSIONS I APORTACIONS DEL TREBALL

6.1. CONCLUSIONS

El nombre d'or té unes propietats molt curioses i que cap altre número té. Com he dit en el treball, aquest nombre permet construir, espirals logarítmiques, estrelles pentagonals i altres formes geomètriques.

El nombre d'or i la sèrie de Fibonacci es poden trobar sovint a la Natura, en les plantes, closques d'animals, el cos humà, etc. Per aquest motiu, perquè sovint l'home copia la Natura, no ens ha d'estranyar que s'hagi fet servir en l'arquitectura, pintura i altres arts.

Com hem vist, al llarg de la història, l'home, conscient o inconscientment, ha fet servir la proporció àuria en la construcció de nombrosos elements de la vida quotidiana com ara en llibres, targes, taules, finestres, etc. La raó d'això és que les figures que contenen les proporcions àuries són més agradables estèticament.

En l'art, i especialment en l'arquitectura, aquesta proporció ha estat utilitzada per arquitectes i mestres de la construcció i per tant he pogut demostrar que s'ha fet servir en edificis romànics, gòtics i modernistes d'una manera conscient i continuada.

Com diuen els llibres que he consultat, en el gòtic i el romànic les proporcions àuries es feien servir sistemàticament per a la distribució dels espais. He pogut comprovar que això és cert analitzant les esglésies de St. Vicenç de Cardona i la Catedral de Mallorca d'estils romànic i gòtic respectivament.

Quan vaig començar el treball tenia la impressió que el modernisme, per voler ser un estil que trencava amb els estils anteriors, no presentaria proporcions àuries. Això és cert només parcialment ja que encara que hi ha obres modernistes on no s'ha trobat cap proporció àuria, n'hi ha d'altres on n'estava ple.

De l'arquitecte Antoni Gaudí, he estudiat les obres següents: el Palau Episcopal d'Astorga, la Casa Calvet, la Sagrada Família i la Pedrera. Les dues primeres mantenen les proporcions àuries, mentre que les últimes no. Sorprèn que en dues de les obres estudiades hi hagi trobat proporcions àuries i en les altres dues no. Una explicació podria ser que el Palau Episcopal d'Astorga i la Casa Calvet són de les primeres obres que Gaudí va fer i, per ser de les primeres, va seguir models tradicionals o, una altra explicació és que els clients imposaven el seu gust. En canvi, a la Sagrada Família i la Pedrera que hi treballa fins ben entrat el segle XX, Gaudí pot desenvolupar la creativitat sense entrebancs i trencar motlles. Això és només una suposició que em faig, però que no he pogut demostrar.

Les obres que he estudiat de l'arquitecte Manuel Raspall a La Garriga són Can Barbey i la Bombonera. Aquestes contenen les proporcions àuries estudiades. També les he trobat en alguns elements de decoració exterior de la Torre Iris. Aquest darrer edifici però, no l'he pogut estudiar perquè no he pogut aconseguir els plànols.

Per tot plegat, penso que el Modernisme, tot i que trenca molts estils anteriors, manté les proporcions àuries perquè són harmòniques i agradables a la vista. Només les obres més destacades del geni Antoni Gaudí trenquen completament amb el passat.

6.2 APORTACIONS DEL TREBALL

No he trobat cap referència en cap llibre sobre el modernisme i les proporcions àuries. Aquest treball aporta la idea que en el modernisme molt sovint es troben les proporcions àuries, excepte en aquelles obres en què l'artista s'ha pogut expressar lliurement, com es troba a Gaudí amb la Sagrada Família i la Pedrera. Tot i així, això s'hauria de confirmar estudiant més obres d'aquests i altres arquitectes modernistes.

Una altre aportació és l'aparell que m'he inventat i li he posat el nom d'auròmetre. L'aparell l'he construït basant-me en el teorema de Tal·les, i encara que l'he fet servir poc, penso que és un aparell útil per buscar proporcions àuries.

Finalment també he trobat la manera ràpida de buscar proporcions àuries a plantes i perfils d'edificis fent servir l'escaire i el cartabò basant-me en les propietats dels rectangles semblants.

7. BIBLIOGRAFIA

Bonell, C. 1999. "La divina proporción. Las formas geométricas"- Arquitect. Edicions UPC. Barcelona. 128 pp.

L'he fet servir per redactar una part del capítol 2 en el que es defineix el nombre d'or, les proporcions àuries i les seves propietats

Carbonell, E. 1976. "El romànic català". Edicions 62. Barcelona

El llibre descriu moltes esglésies romàniques catalanes i n'he extret la planta de Sant Vicenç de Cardona

Cuspinera, L.; Planas, J. I Rohrer, J. 1997. "M. J. Raspall, arquitecte (1877-1937)".

Editorial Fundació La Caixa. Barcelona.

Aquest llibre m'ha ajudat a triar alguna de les cases modernistes de La Garriga que he estudiat i m'ha donat la pista per anar a veure l'arquitecte Lluís Cuspinera que, com he dit als agraïments, m'ha facilitat alguns plànols de les cases

GHYKA, Matila C.: *El número de oro. Ritos y ritmos pitagóricos en el desarrollo de la civilización occidental*" 1978. Volum I. Ed. Poseidón, Barcelona.

D'aquest llibre he tret part de la informació de l'ús del nombre d'or al llarg del temps i les referències a l'arquitectura de l'Edat Mitja

Huerta, F. 1986. "La arquitectura de Antoni Gaudí". Institut de Ciències de la Educació.

UPC. Barcelona. 37 pp + col·lecció de 80 diapositives

A la col·lecció de diapositives hi havia diverses plantes i alçats d'edificis d'Antoni Gaudí (Can Batlló, Casa Calvet, La Sagrada Família, Palau Episcopal d'Astorga). Les he escanejat per tal de trobar proporcions àuries.

Pedoe, D. 1979. "La geometría en el arte". Editorial Gustavo Gili. Barcelona. 289 pp.

D'aquest llibre he tret la construcció gràfica del nombre d'or

Pàgines web:

<http://pw1.netcom.com/~merrills/fibphi.html>

D'aquesta adreça he agafat informació sobre la Successió de Fibonacci. Hi ha, a més, molts links a altres adreces molt interessants

<http://www.newcastle.edu.au/discipline/fine-art/pubs/villard/>

Carpeta de dibuixos de Vilard d'Honnecourt

<http://ccins.cam.ac.uk/~jbritton/goldslide/jbgoldslide.htm>

D'aquí he obtingut part de la informació de l'ús del nombre d'or al llarg del temps

<http://rt000z8y.cresmas.net/EI%20numero%20de%20oro.htm>

D'aquí he obtingut part de la informació de l'ús del nombre d'or al llarg del temps (la pàgina està feta per Ignacio A. Langarita)

<http://www.gaudiallgaudi.com/C0003.htm>

D'aquí he agafat informació sobre les característiques del modernisme.